

2. Conservación de la masa

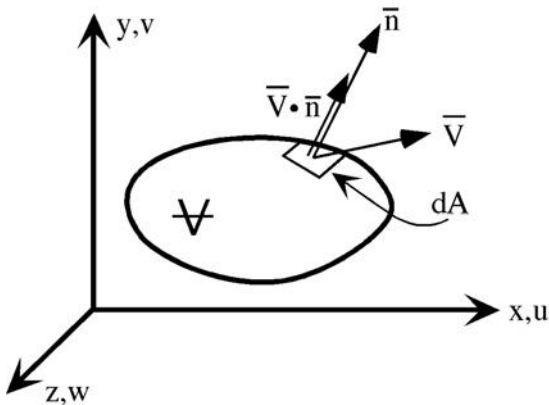
La ecuación de conservación de la masa representa una previsión de la adición y sustracción de masa de una región concreta de un fluido. Pensemos en un volumen fijo e indeformable de un fluido, \forall , llamado volumen de control (cv), que tiene un límite de superficie definido, llamado superficie de control (cs). Para que se cumpla la conservación de la masa, la tasa de intercambio de masa por unidad de tiempo dentro del volumen de control tiene que ser igual a la velocidad a la que la masa penetra en el volumen de control más la velocidad a la que éste gana o pierde masa debido a fuentes y sumideros. A continuación se describe una expresión matemática de esta ley.

Dentro del volumen de control existe una distribución de algunas especies, que viene definida por el campo de concentración (**concentration field**) $C(x,y,z)$. La masa total dentro de dicho volumen es:

$$(1) M = \int_{cv} C d\forall.$$

M puede variar a lo largo del tiempo debido a fuentes y sumideros localizados en el interior del volumen, o a flujos de masa que atraviesen sus límites. En un sistema de fluidos existen dos tipos de flujo másico: advección y difusión. El flujo neto de masa que sale del volumen de control viene dado por la integral:

$$(2) \int_{cs} C \vec{V} \cdot \vec{n} dA.$$



Aquí, $\vec{V} = (u, v, w)$ es el vector de velocidad y \vec{n} es la normal que apunta hacia afuera para el segmento de superficie dA . $\vec{V} \cdot \vec{n}$ representa la componente de velocidad perpendicular al segmento de área dA . Definir a \vec{n} como la normal en dirección hacia afuera convierte a (2) en el flujo neto de \forall . Es decir, el flujo saliente de \forall (en la misma dirección que \vec{n}) contribuye positivamente a la integral, y el flujo entrante en \forall (opuesto a \vec{n}) contribuye negativamente. El flujo neto saliente del volumen de control debido a la difusión se define mediante la ley de Fick.

$$(3) - \int_{cs} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA$$

Nótese que los gradientes de concentración se definen respecto del eje \bar{n} , es decir son siempre perpendiculares a la superficie y en posición hacia afuera. Designar a D_n como el coeficiente de difusión a lo largo del eje \bar{n} permite la anisotropía en D . Para la difusión molecular y/o la turbulencia isotrópica, D no es una función de dirección y el subíndice se puede eliminar. La expresión matemática definitiva de conservación de la masa combina (1), (2) y (3).

Conservación de la masa en forma integral (volumen de control)

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} C \, dV = - \int_{cs} C \bar{V} \cdot \bar{n} \, dA + \int_{cs} D_n \frac{\partial C}{\partial n} \, dA \pm S$$

velocidad de cambio de masa en el tiempo dentro de cv	flujo de advección entrante en el volumen de control	flujo difusivo entrante en el volumen de control	fuente sumidero
---	--	--	-----------------

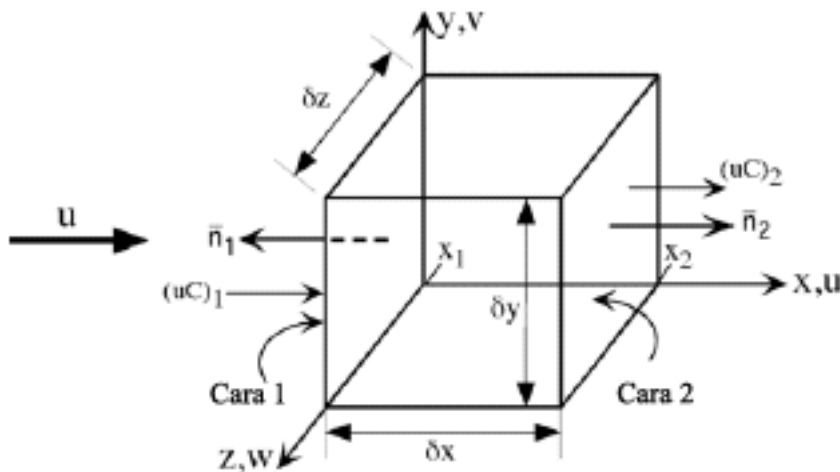
Problemas de ejemplo en que se emplea la forma integral de conservación de la masa (ábralos desde la página principal para verlo en una ventana nueva)

Forma diferencial de conservación de la masa

La forma diferencial de conservación de la masa se deduce expresando (4) para un volumen cúbico infinitamente pequeño. El volumen es lo suficientemente pequeño para que asumamos que la concentración en su interior es esencialmente uniforme. Además, es rígido, de modo que las dimensiones δx , δy , y δz son constantes. Las dos integrales de superficie (elementos 2 y 3 de (4)) se reducen a una suma de flujos que atraviesan cada una de las seis caras del cubo.

$$(5) \quad \frac{\partial C}{\partial t} \delta V = \sum_{i=1}^6 \left[-C \bar{V} \cdot \bar{n} dA + D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA \right]_i \pm S$$

A modo de ejemplo, pensemos en flujos en dirección x que atraviesan las caras designadas con 1 y 2, y situadas en $x = x_1$ y x_2 , respectivamente.



En la cara 1 \bar{n} apunta en dirección x negativa, de modo que $\bar{V} \cdot \bar{n} = -u$, y $\partial C/\partial n = -\partial C/\partial x$. El cálculo de la integral de superficie para la cara 1 es, por lo tanto:

$$(6) \quad \text{Flujo a través de 1} = (uC)_1 \partial y \partial z - (D_x \partial C/\partial x)_1 \partial y \partial z.$$

Para la cara 2 es similar, teniendo en cuenta que \bar{n} apunta en dirección x positiva:

$$(7) \quad \text{Flujo a través de 2} = -(uC)_2 \partial y \partial z + (D_x \partial C/\partial x)_2 \partial y \partial z$$

El flujo neto en dirección x que entra en el volumen de control es la suma de (6) y (7).

$$(8) \quad \text{Flujo neto en x} = ((uC)_1 - (uC)_2 - (D_x \partial C/\partial x)_1 + (D_x \partial C/\partial x)_2) \partial y \partial z.$$

Si asumimos que C, u, $\partial C/\partial x$, y D_x son funciones continuas de x, se puede utilizar una expansión de Taylor para expresar cada parámetro en x_2 como una función del mismo parámetro en x_1 .

$$(9) \quad (uC)_2 = (uC)_1 + \frac{\partial}{\partial x}(uC) \partial x + \text{elementos de orden superior.}$$

$$(10) \quad (D_x \frac{\partial C}{\partial x})_2 = (D_x \frac{\partial C}{\partial x})_1 + \frac{\partial}{\partial x}(D_x \frac{\partial C}{\partial x}) \partial x + \text{elementos de orden superior.}$$

Si descartamos los elementos de orden superior y sustituimos $(uC)_2$ y $(D_x \partial C/\partial x)_2$ en (8) por las expresiones (9) y (10), entonces (8) se convierte en:

$$(11) \quad \text{Flujo neto en x} = \left[-\frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] \partial x \partial y \partial z.$$

Se pueden hallar expresiones similares para el flujo a través de las cuatro caras restantes. Combinándolas en (5) y teniendo en cuenta que $\partial \Psi = \partial x \partial y \partial z$,

Conservación de la masa en forma diferencial

$$(12) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial uC}{\partial x} - \frac{\partial vC}{\partial y} - \frac{\partial wC}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S.$$

Esta expresión se puede simplificar bajo las siguientes condiciones. En primer lugar, hay que tener en cuenta la expansión de los flujos advectivos de (12),

$$(13) \quad \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] C + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z}$$

Si el campo de flujo es incompresible, entonces, por continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Esto elimina el elemento entre paréntesis en (13). Así, la conservación de la masa para una corriente incompresible se puede expresar de la siguiente manera. Por convención, los elementos advectivos se colocan a la izquierda.

Conservación de la masa para flujos incompresibles

$$(14) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

Es más, cuando los coeficientes de difusión son homogéneos, $D_i \neq f(x, y, o z)$:

$$(14a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = +D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \pm S.$$

Si además los coeficientes de difusión son isotrópicos, $D_x = D_y = D_z$, entonces:

$$(14b) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] \pm S.$$

En los flujos laminares, la difusión molecular controla el flujo difusivo. En general, la difusión molecular es a la vez homogénea e isotrópica, de modo que la ecuación (14b) es adecuada para el flujo laminar. En las corrientes turbulentas, el transporte turbulento domina al flujo difusivo. Normalmente, el campo turbulento es heterogéneo y anisotrópico, y así serán también los coeficientes de difusión.

2.1. Derivada material

El movimiento de los fluidos y cualquier componente (temperatura, concentración) transportado por los mismos se pueden describir desde dos puntos de vista, bien de forma estacionaria o bien desplazándose con la corriente. Desde una perspectiva **euleriana**, la corriente y sus componentes escalares se describen respecto a posiciones espaciales fijas, $\vec{X} = (x, y, z)$ y respecto al tiempo (t), y se escriben, por ejemplo, $\vec{V}(\vec{X}, t)$ y $C(\vec{X}, t)$. La perspectiva **lagrangiana** se desplaza con la corriente, y describe la evolución temporal de partículas concretas del fluido. Al revés de lo que sucede con la descripción euleriana, donde la posición espacial es una referencia fija, en la perspectiva lagrangiana la

posición espacial es otra variable de la partícula. Las variables de flujo se expresan con respecto al tiempo (t) y a una única referencia de posición inicial, es decir \bar{X}_0 es la posición de la partícula cuando $t = 0$, de modo que las variables se expresan como $\bar{X}(\bar{X}_0, t)$ y $C(\bar{X}_0, t)$.

La perspectiva euleriana suele ser más fácil de representar, y por lo tanto es más común en el análisis y descripción de flujos. No obstante, los aspectos físicos y el transporte de los flujos guardan una relación más directa con la perspectiva lagrangiana. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier- Stokes fundamentalmente representan la Segunda Ley de Newton ($\bar{F} = m\bar{a}$) aplicada a las partículas de fluido. En los problemas de transporte, tales como el rastreo de la evolución de un cúmulo de fitoplancton a medida que va creciendo (fuente), sirve de alimento a otros seres vivos (sumidero) y se difunde, se ve una vez más la ventaja conceptual de la perspectiva lagrangiana: predecir la concentración haciendo un seguimiento del cúmulo. Como ambas perspectivas son importantes, es fundamental entender cómo se relacionan.

Tomemos $F(x,y,z,t)$ como una variable cualquiera del flujo descrito en términos de unas coordenadas eulerianas fijas, (x, y, z) . Pretendemos relacionar esta descripción con una perspectiva lagrangiana y, en concreto, describir la velocidad de cambio que se observa en F al seguir a una partícula concreta a través de la corriente. En primer lugar, podemos describir un cambio en F , dF , debido a una pequeña modificación de la posición espacial ($d\bar{X}$) o en el tiempo (dt), como:

$$(15) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

A continuación, restringimos los incrementos de dt y $d\bar{X}$, de forma que sigan la trayectoria de una partícula específica, en concreto, $dx = u dt$, $dy = v dt$, y $dz = w dt$. Así, (15) se convierte en:

$$(16) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + u \frac{\partial F}{\partial x} dt + v \frac{\partial F}{\partial y} dt + w \frac{\partial F}{\partial z} dt.$$

Dividiendo entre dt , se obtiene una derivada que representa la tasa de cambio observada en F al seguir la trayectoria de una partícula de fluido. Para subrayar esta definición especial, se expresa la derivada con la notación DF/Dt , es decir:

$$(17) \quad \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}.$$

La notación DF/Dt se llama derivada material (también derivada de partícula, derivada sustancial y derivada total) para resaltar que se toma siguiendo a una partícula de fluido. La derivada material tiene dos partes. La primera, $\partial F/\partial t$, llamada derivada local, representa la tasa de cambio en cualquier punto fijo. Para una corriente estacionaria, $\partial/\partial t = 0$. Los elementos restantes, $u\partial F/\partial x + v\partial F/\partial y + w\partial F/\partial z$, reciben el nombre de derivada advectiva, porque registran los cambios que se producen en F a medida que el elemento de fluido realiza la advección a través de gradientes espaciales de F . Las animaciones siguientes ilustran la derivada material.

Campo de temperatura estacionario: Esta animación muestra un sistema unidimensional con un gradiente de temperatura espacial, $T(x)$. Una sonda de temperatura (el punto blanco) se mueve con la corriente, realizando una observación lagrangiana. La sonda registra la derivada material (total), que en una dimensión es:

$$(18) \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Las sondas situadas en las posiciones fijas A, B y C realizan observaciones eulerianas. Muestran un campo térmico estacionario, es decir, $\partial T/\partial t = 0$, de modo que la derivada material es igual a la derivada advectiva, $DT/Dt = u \partial T/\partial x$. Esto se cuantifica en el ángulo inferior derecho de la animación. El campo de temperatura que aquí aparece podría ser el resultado de un flujo constante y uniforme a través de un elemento calefactor. La temperatura del fluido aumenta constantemente a medida que se añade calor a su trayectoria.

Campo de temperatura no estacionario: Esta animación muestra un sistema unidimensional con un campo temperatura no estacionario $T(x,t)$. Una sonda de temperatura (el punto blanco) se mueve a través de la corriente a una velocidad u , y registra la derivada material que se da en (18). Existen otras tres sondas adicionales situadas en posiciones fijas A, B y C. Éstas registran la derivada local, $\partial T/\partial t$, que es distinta de cero (no estacionaria), pero igual en todas las posiciones. El valor de las derivadas aparece en el ángulo inferior derecho.

Flujo estacionario con aceleración espacial en una tubería: En esta animación, el flujo a través de una tubería se acelera corriente abajo a medida que la sección transversal de la tubería disminuye, es decir, $\partial u/\partial x > 0$. Tres sondas que miden la corriente en posiciones fijas, A, B y C, muestran que el flujo es estacionario, $\partial u/\partial t = 0$ en todas las ubicaciones. Otra sonda de velocidad (el punto azul) se mueve con la corriente y registra la derivada material (total), Du/Dt . Dentro de cada sección de la tubería, $Du/Dt = 0$, tal y como muestra la marca azul del gráfico velocidad - tiempo. En los cambios de paso de las áreas entre secciones, el fluido acelera localmente, $\partial u/\partial x > 0$, y en estas posiciones $Du/Dt = u \partial u/\partial x$.

¿Cuál es la velocidad media de este sistema? Desde el punto de vista del transporte, la mejor definición de velocidad media es la lagrangiana, es decir, la velocidad media experimentada por una sonda que se desplaza con la corriente. Ésta necesita 109 segundos para atravesar una tubería de 90 m. de longitud. Esto nos da una velocidad de $90/109 = 0,83 \text{ ms}^{-1}$. Existe la tentación de definir una velocidad media euleriana basada en la media espacial de la velocidad dentro de las tres secciones. Dado que las longitudes de los segmentos son iguales en este sistema unidimensional, la media se calcula rápidamente, $(0,50 + 0,89 + 2,0)/3 = 1,13 \text{ m/s}$. Este valor, sin embargo, carece de significado desde el punto de vista del transporte, ya que no predice el tiempo necesario para atravesar el sistema, es decir, $90 \text{ m.}/1,13 \text{ ms}^{-1} = 80 \text{ s.} \neq 109 \text{ s.}$