1.138J/2.062J, PROPAGACIÓN DE ONDAS

Otoño 2000 MIT

Notas de C. C. Mei

CAPÍTULO CINCO

Temas varios

1 Localización de ondas en un medio aleatorio

[Ref]: Mei y Pihl Localization of nonlinear dispersive waves in weakly random media, *Proc. Roy. Soc. Lond.* 2002, 458, 119-134.

Existen numerosas situaciones en las que se necesita saber cómo se propaga una onda a través de un medio con impurezas aleatorias: la luz a través de un cielo con partículas de polvo, el sonido a través de agua con burbujas, las ondas elásticas a través de un medio sólido con grietas, fibras, cavidades o vetas duras o blandas. Ondas marítimas sobre una topografía irregular, etc. En estas situaciones, varios tipos de cuestiones pueden revestir interés físico: ondas determinísticas (sinusoidales o impulsivas) a través de un medio aleatorio, ondas aleatorias a través de un medio determinísticamente irregular y ondas aleatorias a través de un medio aleatorio.

Hay mucho material publicado sobre la propagación de ondas sinusoidales infinitesimales en medios aleatorios. Sobre la base de ecuaciones de campo linealizadas, se han desarrollado teorías de perturbación para casos en que la inhomogeneidad aleatoria es débil y la escala de longitud de fluctuación es comparable a la típica longitud de onda (véase, Chernov, 1960; Keller, 1964, Karal & Keller, 1964; Chen & Soong, 1972). También se han empleado técnicas diagramáticas (Frisch, 1968; Elter y Molyneux, 1972). Si las inhomogeneidades se extienden por una región espacial grande, la dispersión múltiple da como resultado un cambio en el número de onda (o velocidad de fase), así como una atenuación de amplitud sobre una gran distancia. Estos cambios equivalen a un desplazamiento de la propagación compleja constante con la parte real correspondiente al número de onda y la parte imaginaria a la atenuación. En especial, la atenuación espacial (localización) es un rasgo característico de aleatoriedad y es eficaz para un amplio espectro de frecuencias de onda incidental. Casi lo contrario que las inhomogeneidades periódicas que causan una fuerte dispersión sólo por ciertas bandas de frecuencias (dispersión de

Bragg, véase por ejemplo, Nayfeh). Phillip W. Anderson (1958) fue el primero en demostrar que el movimiento mecánico-cuántico de una partícula en un potencial aleatorio se puede localizar en el espacio, convirtiendo un conductor en un aislante. Este fenómeno, conocido en la actualidad como *localización de Anderson,* es también importante en los sistemas mecánicos clásicos. Un estudio de localización en muchos tipos de ondas básicas basado en teorías lineales se puede hallar en el monográfico de Sheng (1998). Para las ondas de agua en superficie, la localización mediante inhomogeneidades pronunciadas también se ha tratado con medios semi-numéricos para ondas de agua superficiales sobre un lecho marino aleatoriamente desigual, donde el punto álgido de la desigualdad es comparable a la profundidad media (Devillard et al, 1988; Nachbin y Papanicolaou, 1992; Nachbin, 1995). Belzons et al (1988) han informado de la confirmación experimental de este fenómeno.

En pequeñas inhomogeneidades, el cambio en la constante de propagación equivale a modulaciones espaciales lentas con una escala de longitud mucho mayor que la longitud de onda mediante un factor inversamente proporcional a la correlación de las fluctuaciones. En esta sección, utilizamos el *método de las escalas múltiples* para examinar pequeñas inhomogeneidades aleatorias. Se utiliza como ejemplo el simple caso de una cuerda con soporte elástico, mientras que se pueden anticipar las extensiones a otras ondas. Tras derivar la ecuación del envolvente, se explorarán las implicaciones físicas.

Comenzamos por la ecuación para el desplazamiento lateral de una cuerda tensa enterrada en un medio elástico lineal,

$$\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + K(1+\epsilon M(x))V = 0 \tag{1.1}$$

V denota el desplazamiento lateral, ρ la masa por unidad de longitud, T la tensión en la cuerda, K la constante media de elasticidad del medio de alrededor, $\epsilon KM(x)$ las fluctuaciones aleatorias de la fuerza elástica lineal. Asumimos que M tiene un promedio cero y la típica escala de longitud de $O(1/k)$. En aras de la demostración, elegimos que la parte lineal del muelle contenga irregularidades aleatorias. En principio, la aleatoriedad puede aparecer también en la densidad ρ.

Como la correlación de una función aleatoria es proporcional al cuadrado de la amplitud de las fluctuaciones aleatorias, la escala de longitud de modulación debida a la aleatoriedad ha de ser del orden $O(1/k\epsilon^2$. Introduzcamos las variables rápidas y lentas x, $x_2 = \epsilon^2 x$ y asumamos además expansiones de dos variables,

$$V = V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \cdots, \quad \text{con} \quad V_n = V_n(x, x_2, t), n = 0, 1, 2, ... \tag{1.2}$$

En el formalismo de múltiple escala, pretendimos, en primer lugar, que las dos variables fuesen independientes, luego utilizamos la definición de la variable lenta x_2. En particular, debemos hacer la siguiente sustitución:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial F(x,x_2,t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,x_2,t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \tag{1.3}$$

Resultan las siguientes ecuaciones de perturbación:

$O(\epsilon^0)$:

$$\rho\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + KV_0 = 0 \tag{1.4}$$

$O(\epsilon)$:

$$\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + KV_1 + KMV_0 = 0 \tag{1.5}$$

$O(\epsilon^2)$:

$$\rho\frac{\partial V_2}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + KV_2 + KMV_1 - T\left(2\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial x_2}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Llevemos la solución de orden principal a ser una onda progresiva,

$$V_0 = A\left(x_2\right)e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.7}$$

con la relación de dispersión:

$$\omega = \left(\frac{Tk^2 + K}{\rho}\right)^{1/2}, \quad C = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{T}{\rho} + \frac{K}{\rho k^2}\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

En el orden $O(\epsilon)$ la ecuación (1,5) puede escribirse:

$$\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + KV_1 = -KM(x,x_2)Ae^{ikx-i\omega t}. \tag{1.9}$$

donde el término forzado de la derecha es una función aleatoria de x y x_2. Sea,

$$V_1 = \overline{V}_1 e^{-i\omega t} \tag{1.10}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \overline{V}_1}{\partial x^2} + k^2 \overline{V}_1 = \frac{K}{T} M(x, x_2) A(x_2) e^{ikx}, \tag{1.11}$$

donde se hace uso de

$$k = \left(\frac{\rho\omega^2 - K}{T} \right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

A partir de aquí, consideramos que la frecuencia está por encima del límite $\sqrt{K/T}$ de modo que k sea real y positiva. La ecuación (1.11) se puede resolver mediante la función de Green,

$$G = \frac{-i}{2k} e^{ik|x-\xi|} \tag{1.13}$$

lo cual satisface la condición de radiación en infinidades. El resultado es:

$$\overline{V}_1 = \frac{-iKA}{2kT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-\xi|} M(x) e^{ik\xi} d\xi \tag{1.14}$$

de modo que

$$V_1 = \frac{-iKA}{2kT} e^{ikx - i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik|x-\xi|} e^{-ik(x-\xi)} M(x) \tag{1.15}$$

lo que se comporta como ondas salientes de igual modo que $x - \xi \to \pm\infty$.

Como el conjunto medio de $M(x)$ se anula, esto es, $\langle M(x) \rangle = 0$, tenemos,

$$\langle V_1 \rangle = \langle \overline{V}_1 \rangle e^{-i\omega t} = 0. \tag{1.16}$$

El conjunto medio de la ecuación (1.6) se convierte en:

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 \langle V_2 \rangle}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \langle V_2 \rangle}{\partial x^2} + K \langle V_2 \rangle - T \left(2ik \frac{\partial V_0}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + \left[K \left\{ \frac{-iK}{2kT} \int e^{ik|x-\xi|} \langle M(x) M(\xi) \rangle e^{-ik(x-\xi)} d\xi \right\} e^{ikx - i\omega t} \right] = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde $\langle M(x) M(\xi) \rangle$ es la función de correlación de las irregularidades. Si igualamos la suma de todos los términos seculares a cero, obtenemos la ecuación de evolución para A,

$$-2i\omega\rho\left(C_g\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)-i\frac{K^2A}{2kT}\int_{-\infty}^{\infty}\langle M(x)M(\xi)\rangle e^{ik|x-\xi|}e^{-k(x-\xi)}d\xi=0 \tag{1.18}$$

donde

$$C_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{Tk}{\rho\omega} \tag{1.19}$$

es la velocidad de grupo

Como ejemplo específico tomamos

$$\langle M(x)M(\xi)\rangle=\sigma^2e^{-\alpha|x-\xi|}, \tag{1.20}$$

así, $\epsilon\sigma$ corresponde a la raíz cuadrada media de la amplitud de fluctuación. La escala de longitud de correlación es $1/\alpha$. Un pequeño α significa un alto grado de aleatoriedad. Se puede demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik|x-\xi|}\sigma^2e^{-\alpha|x-\xi|}e^{-ik(x-\xi)}d\xi=\sigma^2\left[\frac{2\left(\alpha^2+2k^2\right)}{\alpha(\alpha^2+4k^2)}+\frac{2ik}{\alpha^2+4k^2}\right]. \tag{1.21}$$

(Chen & Soong, *1972).* Sea,

$$2\beta=2\left(\beta_r+i\beta_i\right) \tag{1.22}$$

con

$$\beta_r=-\left(\frac{K^2\sigma^2}{2\rho\omega T}\right)\frac{1}{\alpha^2+4k^2},\quad \beta_i=\left(\frac{K^2\sigma^2}{2\rho\omega T}\right)\frac{(\alpha^2+2k^2)}{k\alpha(\alpha^2+4k^2)}. \tag{1.23}$$

obtenemos de (1.17)

$$2i\left(C_g\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)+2\beta A=0. \tag{1.24}$$

Si escribimos

$$A=a(x_2)e^{i\theta(x_2)} \tag{1.25}$$

donde *a* es la magnitud y θ la fase de *A*. De la parte real obtenemos:

$$\theta=\beta_r x_2/C_g \tag{1.26}$$

De la parte imaginaria obtenemos :

$$2C_g\frac{\partial a}{\partial x_2}+2\beta_i a=0, \tag{1.27}$$

de ahí

$$a(x_2)=A_0\exp\left(-\frac{\beta_i x_2}{C_g}\right). \tag{1.28}$$

demostrando que las ondas incidentales están atenuadas (localizadas) por irregularidades aleatorias. La tasa de distancia de atenuación (localización) es:

$$L = \frac{C_g}{\epsilon^2 \beta_i} = \frac{2\rho\omega C_g T k}{\epsilon^2 K^2 \sigma^2} \frac{\alpha(\alpha^2 + 4k^2)}{\alpha^2 + 2k^2} = \frac{2T^2 k^2}{\epsilon^2 K^2 \sigma^2} \frac{\alpha(\alpha^2 + 4k^2)}{\alpha^2 + 2k^2}. \quad (1.29)$$

Para α y k fijos, L es pequeño (atenuación importante) si la amplitud de fluctuación $\epsilon\sigma$ es grande. Para $\epsilon\sigma$ fijo, L es también grande para una k grande (ondas cortas) o un α grande, correspondiente a la pequeña distancia de correlación (muy aleatorio).

El cambio total en el número de onda debido a la aleatoriedad es:

$$\Delta k = \frac{\epsilon^2 \beta_r}{C_g} = -\frac{\epsilon^2}{C_g} \frac{K^2 \sigma^2}{2\rho\omega k T} \frac{1}{\alpha^2 + 4k^2} = -\frac{\epsilon^2 K^2 \sigma^2}{2T^2 k} \frac{2k}{\alpha} \frac{1}{\alpha^2 + 4k^2} \quad (1.30)$$

Es negativo, de ahí que contribuya al alargamiento de las ondas o al aumento en la velocidad de fase. La magnitud del cambio en el número de onda aumenta cuando $\epsilon^2\sigma^2$ aumenta y α decrece (aleatoriedad decreciente).

Para debatir los resultados numéricos, véase Mei y Pihl, 2002.

Proyecot IAP (desafío): dispersión de ondas elásticas por distribución aleatoria de granos duros o cavidades.

Referencias

[1] Belzons, M., Guazzelli, E., & Parodi, O., *1988, J. Fluid Mech. 186: 539-*.

[2] Chernov, L. A. *1960, Wave Propagation in a Random Medium* Dover. *168 págs.*

[3] Devillard, P., Dunlop, F. & Souillard, J. *1988. J. Fluid Mech.* Localization of gravity waves on a channel with a random bottom, *J. Fluid Mech. 186: 521-538.*

[4] Elter, J. F. & Molyneux, J. E., *1972.* The long-distance propagation of shallow water waves over an ocean of random depth. *J. Fluid Mech. 53: 1-15.*

[5] Frisch, U. Wave propagation in random media, in *Probabilistic Methods in Applied Mathematics, v. 1.* Academic.

[6] Karal, F.C., & Keller, J. B., *1964,* Elastic, electromagnatic and other waves in a random medium. *J. Math. Phys. 5(4): 537-547.*

[7] Keller, J. B., *1964,* Stochastic eqaiton and wave propogation in readom media, *Proc. 16th Symp. Appl. Math., 145-170.* Amer. Math. Soc. Rhode Island.

[8] Nachbin, A., & Papanicolaou, G.C., *1992, Water waves in shallow channels of rapidly varying depth. J. Fluiid Mech. 241: 311-332.*

[9] Nachbin, A*., 1997. The localization length of randomly scattered water waves. J. Fluid Mech. 296: 353-372.*

[10] Mei, C. C., *1985, Resonant reflection of surface waves by periodic bars, J. Fluid Mech.*

[11] Mei. C. C., *1989, Applied Dynamics of Ocean Surface Waves,* World Scieitific, Singapore. *700 págs.*

[12] Rosales, Rodolfo R., & Papanicolaou, G. C. *1983,* Gravity waves in a channel with a rough bottom. Stud. *Appl. Math. 68: 89-102.*

[13] Sheng, Ping, *1995. Introduction of Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena,* Academic, *339 págs.*

[14] Sheng, Ping,(ed), 1990. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media,* World Scientific.

[15] Soong, T. T., 1973, *Random Differential Equations in Science and Engineering,* 327 *págs*. Academic.

En resumen, la física ha descubierto

que no hay sólidos,

no hay superficies continuas,

no hay líneas rectas;

sólo ondas,

....

R. Buckminster Fuller, *Intuition: Metaphysical Mosaic.*