1.138J/2.062J, PROPAGACIÓN DE ONDAS

Otoño 2000 MIT

Boletín de trabajo en casa núm. 1

1. Una membrana se mantiene tensa sobre un área *S*. La membrana tiene una densidad constante ρ por unidad de superficie y está en condiciones de tensión uniforme en todas direcciones. Obtenga la ecuación de gobierno correspondiente al desplazamiento lateral $u(x, y, t)$ de la membrana vibrando bajo la carga distribuida de $p(x, t)$ por unidad de superficie.

2. Tenga en cuenta la vibración longitudinal de una barra cilíndrica con un extremo fijo en $x = 0$ y el otro en $x = L$ unido a una masa *M.* Antes de que $t = 0$ la barra está comprimida por la longitud ϵL con $\epsilon \ll 1$. En $t = 0$ se libera la compresión. Indique la ecuación de gobierno y todas las condiciones iniciales y de frontera.

3. Tenga en cuenta la vibración torsional de una barra cilíndrica de sección cruzada circular y de radio *a.* Sea $\theta(x, t)$ = desplazamiento angular de la sección cruzada en x, $d\sigma$ = elemento de área en la sección cruzada y ubicado a la distancia r del eje, véase figura (). Sea τ la tensión de corte, G el módulo de rigidez de la elasticidad y ϕ el desplazamiento angular de una línea originalmente paralela al eje. Demuestre que

$$\phi = r\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{H.1.1}$$

Invoque la ley de Hooke $\tau = G\phi$ y demuestre que el par de torsión total aplicado a la sección transversal en x es:

$$M = G\frac{\partial \theta}{\partial x}\iint_S r^2 d\sigma = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{H.1.2}$$

donde

$$J = \iint_S r^2\, d\sigma \tag{H.1.3}$$

es el momento polar de inercia de la sección cruzada. Sea I el momento de inercia por longitud de unidad de la barra. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GJ}{I}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{H.1.4}$$

4. Durante un terremoto, el agua de un embalse ejerce una presión hidrodinámica sobre una presa que puede fallar. Formule el problema de interacción entre la presa y el embalse en virtud de las siguientes

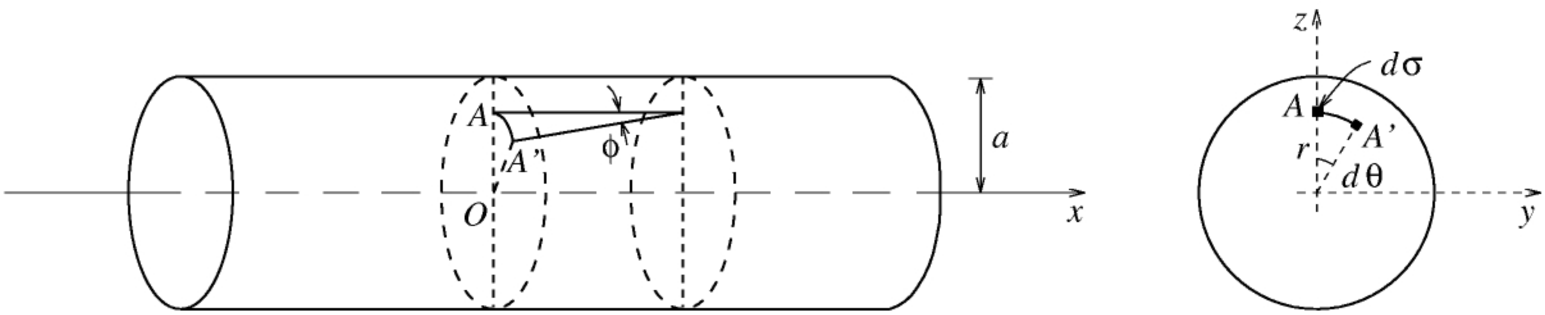

Figura 1: Torsión de un cilindro circular

hipótesis idealizadas. El embalse tiene una longitud infinita y una sección cruzada rectangular uniforme. Sólo hay agua en un lado de la presa ($x > 0$) que tiene una profundidad constante h. Antes de que $t = 0$, todo está en calma. Tras $t = 0$ la presa está forzada a vibrar horizontalmente, de modo que

$$u(0, y, z, t) = \begin{cases} u_o(x, y, t) = \text{prescribed}, & 0 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \qquad \text{(H.1.5)}$$

La superficie libre está expuesta a una presión atmosférica constante. El fondo del embalse es rígido y no vibra horizontalmente (¡menuda idealización!). No tenga en cuenta la gravedad pero sí la compresibilidad del agua debido a la alta frecuencia ($\sim O(100)$Hz). Exprese todas las ecuaciones de gobierno incluidas las condiciones de frontera en términos del potencial de velocidad ϕ definido por $(u, v, w) = \nabla\phi$. Demuestre sobre todo que

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \nabla^2\phi \qquad \text{(H.1.6)}$$