

1.138J/2.062J, PROPAGACIÓN DE ONDAS

Otoño 2000 MIT

Notas de C. C. Mei

Capítulo 1. EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE ONDAS

Para describir un problema en términos matemáticos, hay que hacer uso de las leyes básicas que rigen los elementos del problema. En mecánica continua, son las leyes de conservación de la masa y el momentum. Además, las leyes constitutivas empíricas suelen ser necesarias para relacionar ciertas variables desconocidas; algunos ejemplos son las ecuaciones de estado, la ley de Hooke entre el esfuerzo y la tensión, etc.

Para derivar la ley de conservación se puede tener en cuenta un elemento infinitesimal (un elemento de segmento de línea, de volumen o de área), que dé directamente como resultado una ecuación diferencial. Alternativamente, se puede considerar un volumen de control (o área, o segmento de línea) de tamaño arbitrario en el medio de interés. La ley se obtiene primero de forma integral y, a continuación, se deriva una ecuación diferencial utilizando la arbitrariedad del volumen de control. Ambos enfoques son completamente equivalentes.

Demostremos en primer lugar el método diferencial.

1 Vibración transversal de una cuerda tensa

En relación con la figura 1, tenga en cuenta una cuerda tensa estirada entre dos puntos fijos en $x = 0$ y $x = L$. Sea el área transversal S . Si existe un estiramiento inicial de ΔL , la tensión inicial T ha de ser:

$$T = ES \frac{\Delta L}{L}$$

mediante la ley de Hooke, donde E es el módulo de Young.

Estudie ahora el desplazamiento lateral de la cuerda desde la posición inicial. Por la ley de conservación de momentum transversal, la fuerza lateral total sobre el elemento de cuerda ha de quedar equilibrada por su inercia. Sea el desplazamiento lateral $V(x, t)$ y considere un elemento diferencial entre x y $x+dx$. La fuerza transversal neta debida a la diferencia de tensión en ambos extremos del elemento es:

$$(T \sin \alpha)_{x+dx} - (T \sin \alpha)_x,$$

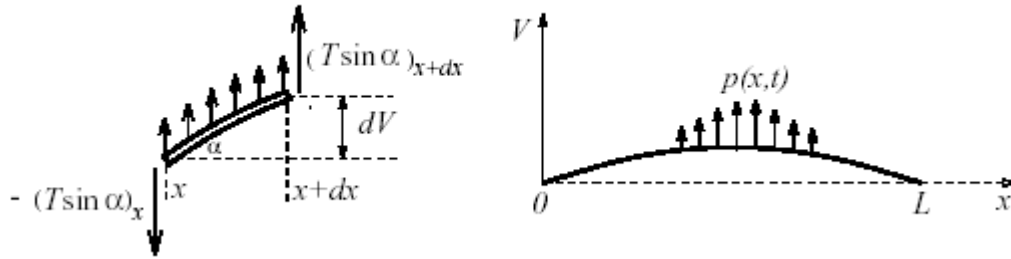


Figura 1: deformación de una cuerda tensa

Donde,

$$\sin \alpha = \frac{dV}{\sqrt{dx^2 + dV^2}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}}.$$

Asumiremos que el desplazamiento es muy pequeño en todos los puntos, con lo que la inclinación también es pequeña: $\frac{\partial V}{\partial x} \ll 1$. Así, el valor local del seno α puede aproximarse mediante:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + O\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^3\right),$$

donde la expresión $O(\delta)$ significa *del orden de* δ . Para cualquier función uniforme la expansión de Taylor da como resultado:

$$f(x + dx) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + O(dx)^2,$$

donde la derivada se evalúa en x . Por lo tanto, la tensión neta es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + O(dx)^2.$$

La longitud instantánea $\ell(x, t)$ de la cuerda de 0 a x es:

$$\ell(x, t) = \int_0^x dx \left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \right]^{1/2} = x \left[1 + O\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \right].$$

De ahí se sigue que:

$$\frac{\ell - x}{x} = O\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \quad \text{para todo } 0 < x < L,$$

lo cual es de una pequeñez de segundo orden. La longitud de la cuerda, y por tanto la tensión, permanece esencialmente inalterada con un error de $O(\partial V / \partial x)^2$, es decir, T se puede tomar como constante con un error igualmente pequeño. De este modo, la tensión neta en el elemento de cuerda está bien representada mediante:

$$T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx.$$

Si la masa por unidad de longitud de la cuerda es ρ , la inercia del elemento es $\rho (\partial^2 V / \partial t^2) dx$. Sea la carga aplicada por unidad de longitud $p(x, t)$. La conservación de momentum requiere que:

$$\rho dx \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + p dx + O(dx)^2.$$

Eliminando dx y llevando el límite de $dx \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{p}{T}. \quad (1.1)$$

Esta ecuación, llamada la *ecuación de onda*, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Es lineal en el desconocido V y no homogénea debido al término forzado en el lado derecho.

¿Es el desplazamiento longitudinal U importante en este problema? La conservación de momentum en la dirección x requiere que:

$$\rho dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (T \cos \alpha)_{x+dx} - (T \cos \alpha)_x.$$

Ya que:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dV)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}} \cong 1 + O\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,$$

la aceleración es de una pequeñez de segundo orden.

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = O\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right) = O\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right).$$

Por tanto $U = O\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) V$ mediante integración dos veces con respecto a t , y el desplazamiento longitudinal puede ignorarse.

La ecuación diferencial (2.1) supone derivativas de segundo orden con respecto a x y t . Se necesitan dos condiciones auxiliares para cada variable. Por ejemplo, en el instante inicial, podemos prescribir el desplazamiento y la velocidad:

$$V(x, 0) = f(x) \tag{1.2}$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, 0) = g(x). \tag{1.3}$$

Estos enunciados se llaman las *condiciones iniciales*. Además, también debemos especificar las *condiciones de frontera* en los extremos. Para una cuerda estirada entre dos extremos fijos, requerimos que:

$$V(0, t) = 0 \text{ y } V(L, t) = 0. \tag{1.4}$$

Junto con la ecuación diferencial parcial, estas condiciones auxiliares definen el problema de valor de frontera inicial. Desde el punto de vista matemático, es importante establecer si dicho problema está bien planteado. Esta cuestión supone la prueba de la existencia, la singularidad y la estabilidad de la solución.

Como se ha visto en este ejemplo, la expansión de Taylor se utiliza prácticamente en cada paso de la derivación. De hecho, es indispensable no sólo para derivar ecuaciones de gobierno, sino también para obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones, y para analizar el contenido físico de la solución.

Observe que la dimensión de coeficiente T/ρ es:

$$\left[\frac{T}{\rho}\right] = \frac{ML/t^2}{M/L} = \left(\frac{L}{t}\right)^2 = [\text{velocidad}]^2.$$

Ahora introduzca la notación $c = \sqrt{T/\rho}$, que es una velocidad característica del problema físico. Entonces, podemos escribir la ecuación (2.1):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{p}{T}, \quad (1.5)$$

denominada la *ecuación de onda* y que surge en varios contextos.

2 Vibración longitudinal de una barra elástica

Tenga en cuenta una barra elástica con el área transversal $S(x)$ y el módulo de Young E , tal y como se muestra en la Figura (2). Sea el desplazamiento longitudinal desde el equilibrio $U(x, t)$. El esfuerzo en la estación x es:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

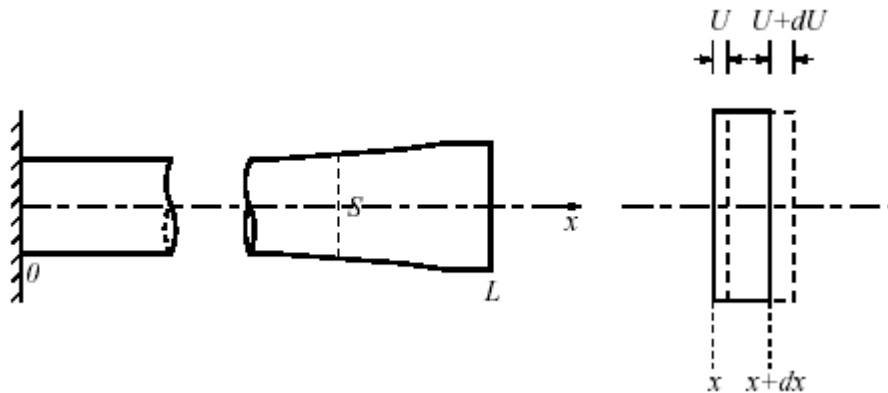


Figura 2: deformación longitudinal de una barra elástica

En virtud de la ley de Hooke, la tensión en x es:

$$ES \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Ahora la tensión neta sobre un elemento de la barra de x a $x + dx$ es:

$$\left(ES \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(ES \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x = dx \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial U}{\partial x} \right) + O(dx)^2.$$

Sea la fuerza longitudinal aplicada externamente $f(x, t)$ por unidad de longitud. La conservación del momentum requiere que:

$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx + f dx + O(dx)^2.$$

En el límite de anular dx , obtenemos la ecuación diferencial:

$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial U}{\partial x} \right) + f. \quad (2.1)$$

En el caso especial de la sección transversal uniforme, $S = \text{constante}$, y fuerza externa cero, entonces U satisface la ecuación de onda no homogénea,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{f}{ES}, \quad (2.2)$$

donde $c = \sqrt{E/\rho}$ tiene la dimensión de velocidad.

Las condiciones de frontera más sencillas son para extremos fijos o libres. Si ambos extremos están fijos, entonces,

$$U(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad U(L, t) = 0. \quad (2.3)$$

Si el extremo de la izquierda está fijo pero el derecho está libre, entonces,

$$U(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = 0, \quad (2.4)$$

ya que el esfuerzo es proporcional a la tensión. De nuevo, las condiciones iniciales más naturales son:

$$U(x, 0) = f(x), \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (2.5)$$

donde f y g son funciones prescritas de x para $0 < x < L$.

Cambiamos el enfoque integral en el siguiente ejemplo.

3 Flujo de tráfico en una autopista

Uno de los modelos matemáticos del flujo de tráfico es la teoría hidrodinámica de

Lighthill y Whitham (1958). Se trata de una teoría simple capaz de describir muchas características cotidianas del tráfico en las autopistas con una fidelidad notable. Suponga cualquier sección de una autopista desde $x = a$ a $x = b$, Figura 3. Para hacerlo más simple, asuma que no hay salidas o entradas y que todos los vehículos están en viaje. Sea la densidad de vehículos (número de vehículos por unidad de longitud de autopista) en x y en t $\rho(x, t)$, y el flujo de vehículos (número de vehículos que cruzan el punto x por unidad de tiempo) $q(x, t)$. Requiriendo que se conserve el número de vehículos dentro de una sección arbitraria desde a hasta b , tenemos:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho(x, t) dx = q(b, t) - q(a, t) .$$

Si escribimos de nuevo el lado derecho,

$$q(b, t) - q(a, t) = \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx ,$$

obtenemos:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0 . \quad (3.1)$$

Como el intervalo de control (a, b) es arbitrario, el integrando debe anularse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Este resultado se puede debatir por contradicción, lo que constituye un razonamiento típico necesario para pasar de una ley integral a una diferencial. Suponga que el integrando es positivo en alguna parte de (a, b) , digamos, en el rango de $(a', b') \in (a, b)$, y cero en otra parte de (a, b) , entonces la integral en (1.3.1) ha de ser positiva. Sin embargo, esto es una contradicción. La asunción de que el integrando es positivo en alguna parte es por tanto incorrecta. Mediante un argumento similar, el integrando no puede ser negativo en ninguna parte y, por lo tanto, debe ser cero en todas partes de (a, b) .

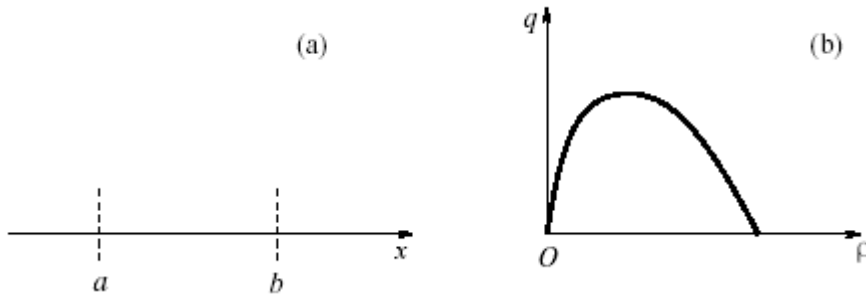


Figura 3: (a). Una sección de la autopista. (b). La relación entre la densidad del tráfico y el ritmo de flujo del tráfico.

La ecuación (1.3.2) es la ley de conservación de los vehículos. Con dos incógnitas q y ρ , es necesaria una relación constitutiva entre ρ y q y ha de hallarse mediante mediciones de campo. Heurísticamente, q debe ser cero cuando no hay vehículos en la carretera, y cero de nuevo cuando la densidad alcanza un máximo (cuando los vehículos van pegados el uno al otro), de ahí que la relación entre q y ρ deba ser no lineal.

$$q = q(\rho) \tag{3.3}$$

como se esboza en la Figura 1.4.b. Con esta relación, (1.3.2) se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{dq}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{3.4}$$

Este resultado es una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden y se utilizará para deducir una variedad de fenómenos interesantes de flujo de tráfico.

En todos los ejemplos estudiados hasta ahora la ecuación de gobierno definitiva solo implica una incógnita. Ahora examinaremos un problema con varias incógnitas.

4 Propagación de onda en arterias

Examinaremos el flujo pulsatorio de la sangre en una arteria cuya pared es delgada y elástica. Como primer ejercicio, asumamos que sólo hay pulsación, pero no flujo neto. A causa del gradiente de presión en la sangre la pared de la arteria ha de deformarse. La fuerza restauradora elástica de la pared hace posible que las ondas se propaguen.

El radio de la arteria $a(x, t)$ varía de la media constante a_0 en el tiempo y a lo largo de la arteria (en x). Sea el área transversal local $S = \pi a^2$, y la velocidad de promedio $u(x, t)$.

Considere un volumen geométrico fijo entre x y $x+dx$, a través del cual se mueve el fluido hacia adentro y hacia afuera. La conservación de la masa requiere:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

A continuación, el balance de momentum. La frecuencia temporal del cambio de momentum en el volumen debe equilibrarse mediante el influjo neto de momentum a través de los dos extremos y la fuerza de presión actuando en todos los lados. La frecuencia del cambio de momentum es:

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} \quad (4.2)$$

La velocidad neta del influjo de momentum es:

$$-\frac{\partial(\rho u^2 S)}{\partial x} dx = -\rho u \frac{\partial u S}{\partial x} - \rho u S \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

La fuerza de presión neta en ambos extremos es:

$$-\frac{\partial(pS)}{\partial x} = -S \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial S}{\partial x}$$

mientras que la presión en la pared inclinada es:

$$2\pi a p \frac{\partial a}{\partial x} = p \frac{\partial S}{\partial x}$$

La suma de todas las fuerzas de presión es:

$$-S \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.4)$$

Si equilibramos el momentum equiparando (5.2) a la suma de a(5.3) y (5.4) obtenemos, tras hacer uso de la conservación de masa (5.1),

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.5)$$

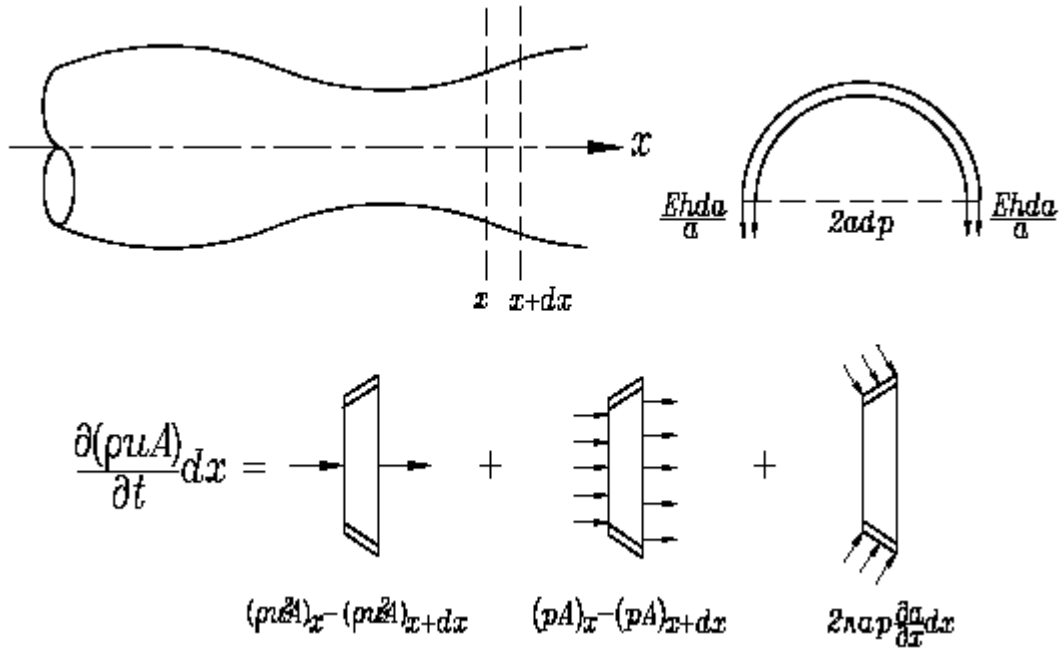


Figura 4: fuerzas sobre la pared de la arteria.

Sea la presión en el exterior de la arteria constante, digamos cero. El cambio en el radio del tubo ha de deberse al cambio en la presión de la sangre. En relación con la figura ??, la tensión elástica debido al alargamiento de la circunferencia es $2\pi da / 2\pi a = da / a$. Sea h el grosor de la pared de la arteria, que se supone debe ser más pequeño que a , y el módulo de Young E . El cambio en la fuerza elástica es $2Ehda / a$ que ha de equilibrarse con el cambio en la fuerza de la presión $2a dp$, esto es,

$$\frac{2Eh da}{a} = 2a dp,$$

lo que implica,

$$\frac{dp}{da} = \frac{Eh}{a^2} \quad \text{or} \quad \frac{dp}{dS} = \frac{\sqrt{\pi} Eh}{S^{3/2}} \quad (4.6)$$

La presión aumenta con el radio del tubo, pero la frecuencia de aumento es más pequeña para un radio mayor. Con la integración obtenemos la ecuación de estado:

$$p - p_o = -E(h/a) = -\sqrt{\pi} Eh / \sqrt{S} \quad (4.7)$$

La ecuación (5.5) puede ahora volver a formularse de la siguiente manera:

$$S \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -C^2 \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.8)$$

donde C se define mediante,

$$C = \sqrt{\frac{S}{\rho} \frac{dp}{dS}} = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho a}} \quad (4.9)$$

y tiene la dimensión de la velocidad. A la vista de (5.6), las ecuaciones (5.1) y (5.8) son un par de ecuaciones no lineales para las dos incógnitas u y S .

Para las amplitudes infinitesimales podemos linealizar estas ecuaciones. Sea $a = a_0 + a'$ con $a' \ll a_0$ entonces la (5.1) se convierte, a primer orden,

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{a_0}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

La ecuación de cantidad de movimiento linealizado es:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.11)$$

La forma linealizada de (5.6) es:

$$dp = \frac{2Eh}{a_0^2} da' \quad (4.12)$$

que se puede utilizar en (5.11) para obtener,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{Eh}{a_0^2} \frac{\partial a'}{\partial x} \quad (4.13)$$

Por último, (5.2) y (5.8) se pueden combinar para dar la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 a'}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

donde,

$$c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho a_0}} \quad (4.15)$$

Alternativamente se puede eliminar a a fin de obtener una ecuación para u ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

A causa de (5.12) la presión dinámica se rige también por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

Todas las incógnitas se rigen por la misma ecuación debido a la linealidad y al hecho de que todos los coeficientes son constantes.

Comentarios sobre la linealización:

Para hallar la exactitud de la linealización, es útil calcular primero las escalas de movimiento. Supongamos que A , T , L , U y P denotan las escalas de a' , t , x , u y p' respectivamente. Es natural tomar $L = c_0 T$. De (5.1), (5.5) y (5.6) obtenemos las relaciones entre las escalas de las cantidades dinámicas:

$$\frac{a_0 A}{T} = \frac{U a_0^2}{L}, \text{ de ahí } U = \frac{A L}{a_0 T}$$

$$P = \frac{E h A}{a_0^2}$$

$$\frac{U}{T} = \frac{1}{\rho} \frac{P}{L} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{L/T} \frac{E h A}{a_0^2}$$

Se deduce que

$$\frac{A L}{a_0 T} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{L/T} \frac{E h A}{a_0^2}$$

por tanto,

$$\frac{L^2}{T^2} = \frac{E h}{\rho a_0} = c_0^2$$

Con estas escalas la proporción de un término típico no lineal con respecto a un término lineal es:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}} \sim \frac{U^2/L}{U/T} = \frac{U}{L/T} = \frac{A}{a_0}$$

De ahí que la condición para la linealización sea que:

$$\frac{A}{a_0} \ll 1$$

5 Ondas en aguas poco profundas y linealización

5.1 Ecuaciones de gobierno no lineales

Cuando el agua de un lago o de la costa marítima sufre perturbaciones, se pueden crear ondas en la superficie, debido a la fuerza restauradora de la gravedad. Tenga en cuenta las leyes básicas que rigen el movimiento de las ondas largas en aguas poco profundas de densidad constante y viscosidad imperceptible. En la Figura 5, supongamos que el eje z se dirige verticalmente hacia arriba y el plano x, y está en la superficie del agua al principio en

calma, $h(x, y)$, indique la profundidad bajo el nivel del mar en calma y $\zeta(x, y, t)$ el desplazamiento vertical de la superficie del agua. Utilice otra vez el modelo diferencial y considere el flujo del fluido a través de una columna vertical con la base $dx dy$.

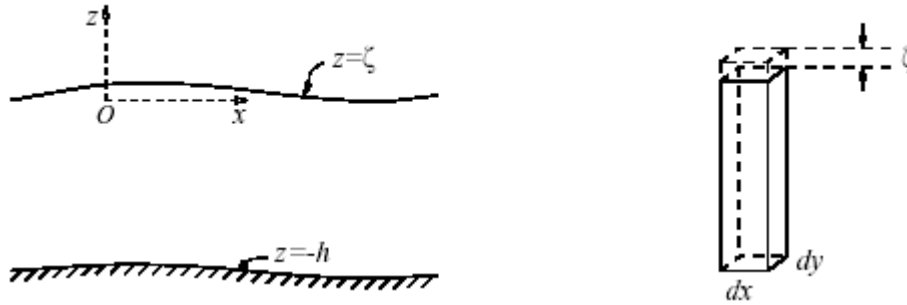


Figura 5: elemento de columna de fluido en un mar poco profundo.

En primer lugar, la ley de la conservación de masa. El índice de incremento de volumen en la columna,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy$$

ha de estar equilibrado por el flujo de volumen neto en la columna desde los cuatro lados verticales. En agua poco profunda, la escala de longitud horizontal, caracterizada por la longitud de onda λ , es mucho mayor que la longitud vertical h . El agua fluye principalmente en los plano horizontales con la velocidad $\mathbf{u}(x, y, t)$, que es esencialmente constante en velocidad. A través de los lados verticales normales al eje x , la diferencia entre el flujo de entrada por la izquierda y el flujo de salida por la derecha es:

$$- [u(\zeta + h)|_{x+dx} - u(\zeta + h)|_x] dy = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u(\zeta + h)] + O(dx) \right\} dx dy.$$

Del mismo modo, a través de los lados verticales normales al eje y , la diferencia entre el flujo de entrada por la parte frontal y el flujo de salida por la parte posterior es:

$$- [v(\zeta + h)|_{y+dy} - v(\zeta + h)|_y] dx = - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [v(\zeta + h)] + O(dy) \right\} dy dx.$$

Si omitimos los términos de orden superior en dx, dy , invocamos la conservación de la masa para obtener:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u(\zeta + h)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\zeta + h)] + O(dx, dy) \right\} dx dy.$$

En el límite de anular dx , dy , tenemos, en forma de vector,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(\zeta + h)] = 0. \quad (5.1)$$

Esta ecuación es no lineal por el producto cuadrático de las incógnitas u y ζ .

A continuación, la ley de conservación de momentum. En aguas poco profundas el balance de momentum vertical está dominado por la gravedad y el gradiente de presión, lo que significa que la distribución de la presión es hidrostática:

$$p = \rho g (\zeta - z), \quad (5.2)$$

donde se ignora la presión atmosférica en la superficie libre. Tenga en cuenta ahora el balance de momentum en la dirección x . La fuerza de presión neta sobre dos lados verticales normales a la dirección x es:

$$\begin{aligned} dx dy \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} p dz &= -dx dy \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho g (\zeta - z) dz \\ &= -\rho g (\zeta + h) \frac{\partial (\zeta + h)}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

La reacción hidrodinámica desde el fondo en pendiente al fluido es:

$$-p \frac{\partial h}{\partial x} dx dy = \rho g (\zeta + h) \frac{\partial h}{\partial x} dx dy.$$

El cambio de momentum del fluido consiste en dos partes. Una parte se debe a la variación en la unidad de tiempo del cambio de momentum en la columna de agua:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho u (\zeta + h)] \right\} dx dy,$$

y el otro se debe al flujo neto del momentum a través de cuatro lados verticales:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho u^2 (\zeta + h)] dx dy + \frac{\partial}{\partial y} [\rho u v (\zeta + h)] dy dx.$$

Si equiparamos la variación total del cambio de momentum a la fuerza de presión neta en los lados y en el fondo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho u (\zeta + h)] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho u^2 (\zeta + h)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho u v (\zeta + h)] \\ = -g (\zeta + h) \frac{\partial (\zeta + h)}{\partial x} + g (\zeta + h) \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

El lado izquierdo se puede simplificar a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\zeta + h) + u \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (\zeta + h)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (\zeta + h)] \right\} \\ = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

invocando la continuidad (1.6.1). De ahí que la ecuación de momentum x se reduzca a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Del mismo modo, el balance de momentum en la dirección y requiere:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (5.4)$$

Estas dos ecuaciones se puede resumir en la forma de vector:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -g \nabla \zeta. \quad (5.5)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.5) son ecuaciones diferenciales parciales no lineales combinadas para tres incógnitas escalares u y ζ .

A continuación, las condiciones iniciales y de frontera. En una costa S , no puede haber un flujo normal, por lo tanto,

$$h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } S, \quad (5.6)$$

donde n indica el vector normal de unidad que señala horizontalmente a la costa. Esta condición es aplicable no sólo en una costa acantilada donde h es finito, sino también en una línea costera donde $h = 0$, con tal de que las olas sean lo bastante suaves como para no romper. En el segundo caso, hay que encontrar un punto de la costa desconocido *a priori* como parte de la solución.

En el instante inicial, se puede suponer que el desplazamiento $\zeta(x, y, 0)$ y la velocidad vertical de la totalidad de la superficie libre $\frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, 0)$ es conocido. Estas condiciones completan la formulación del problema de ondas en agua poco profunda.

5.2 Linealización para amplitud pequeña

Para ondas de amplitud pequeña:

$$\frac{\zeta}{h} \sim \frac{A}{h} \ll 1, \quad (5.7)$$

donde A es la amplitud característica. La ecuación (1.6.1) se puede simplificar ignorando el término cuadrático,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot h \mathbf{u} = 0. \quad (5.8)$$

Indicando la escala temporal mediante el periodo de onda T y la escala de longitud horizontal mediante la longitud de onda λ , equiparamos el orden de magnitudes de los dos

términos restantes anteriores para obtener:

$$\frac{A}{T} \sim \frac{uh}{\lambda}, \quad \text{implicando } \frac{A}{h} \sim \frac{uT}{\lambda} \ll 1.$$

Ahora, permítanos calcular la importancia del término cuadrático $u \cdot \nabla u$ en la ecuación de momentum calculando el ratio,

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} = O\left(\frac{uT}{\lambda}\right) \ll 1.$$

Claramente, el término cuadrático que representa inercia convectiva también se puede ignorar en la primera aproximación, y la ecuación de momento se convierte en:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\zeta. \quad (5.9)$$

La ecuación de continuidad (1.6.8) y la de momentum (1.6.9) están ahora *linealizadas*.

En cambio, a la vista de (1.6.9) la condición frontera en la costa (1.6.6) se puede expresar como:

$$h \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S. \quad (5.10)$$

En coherencia con la aproximación linealizada, la posición de la costa se puede prescribir *a priori*.

Las ecuaciones (6.8) y (6.9) se puede combinar por el proceso de diferenciación cruzada. Primero diferencie (6.8) con respecto a t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) \right\} = 0,$$

a continuación, tome la divergencia del producto de (6.9) y h ,

$$\nabla \cdot \left\{ h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\} = -\nabla \cdot (gh\nabla\zeta).$$

La diferencia de estas dos ecuaciones da:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \nabla \cdot (gh\nabla\zeta). \quad (5.11)$$

Para un fondo horizontal $h = \text{constante}$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \nabla^2 \zeta, \quad (5.12)$$

donde $c = \sqrt{gh} = O(\lambda/T)$ es la velocidad característica del movimiento de onda infinitesimal. La ecuación (1.6.12) es la ampliación bidimensional de la ecuación de onda. Si, además, todas las condiciones son uniformes en la dirección y , $\partial/\partial y = 0$, (6.12) se reduce a la forma familiar:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (5.13)$$

6 Sonido en fluidos

Las ecuaciones básicas que gobiernan un fluido compresible y no viscoso son las siguientes. Conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (6.14)$$

Conservación de momentum:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p \quad (6.15)$$

Debemos añadir una ecuación de estado,

$$p = p(\rho, S) \quad (6.16)$$

donde S indica la entropía. Cuando no se impone desde el exterior ningún gradiente de temperatura y el gradiente del flujo no es demasiado grande, se puede ignorar la difusión termal. Así, el movimiento del fluido es adiabático y la entropía es constante. Como consecuencia de ello $p = p(\rho, S_0)$ sólo depende de la densidad. La ecuación. (7.14) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho \quad (6.17)$$

Indicaremos,

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S} \quad (6.18)$$

para que,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -C^2 \nabla \rho \quad (6.19)$$

Es fácil comprobar que C tiene la dimensión de velocidad.

A partir de la termodinámica, también tenemos:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad (6.20)$$

donde T es la temperatura e $\gamma = c_p / c_v =$ el ratio de calores específicos.

Para un gas perfecto la ecuación de estado es:

$$p = \rho RT \quad (6.21)$$

donde R es la constante del gas. Por lo que para un gas perfecto,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma RT \quad (6.22)$$

Los líquidos son mucho menos compresibles. Normalmente, la ecuación de estado se escribe como:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dT \quad (6.23)$$

Lo que indica:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (6.24)$$

como el coeficiente de expansión termal y

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \quad (6.25)$$

como el coeficiente de compresibilidad isotérmica. Por lo general β es pequeño y κ mucho más pequeño. Bajo condiciones isotérmicas el que cuenta es κ .

El límite más simple se da cuando la densidad de fondo ρ_o y la presión p_o son uniformes, el fluido está estático y las perturbaciones dinámicas son infinitesimalmente pequeñas. Podemos escribir:

$$p = p_o + p', \quad \rho = \rho_o + \rho' \quad (6.26)$$

con $\rho' \ll \rho_o$ y $p' \ll p_o$, y linealizar las ecuaciones a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.27)$$

y,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p' \quad (6.28)$$

Quitando el vector rotacional del segundo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (6.29)$$

así el campo de velocidad es irrotacional si es así desde el principio. Podemos introducir un ϕ potencial mediante,

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (6.30)$$

Se deduce de la ecuación de momentum,

$$p' = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.31)$$

Utilizando estos valores obtenemos la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_o^2 \nabla^2 \phi \quad (6.32)$$

donde,

$$c_o^2 = \left(\frac{\partial p_o}{\partial \rho_o} \right)_s \quad (6.33)$$

7 Ondas de flexión en una viga sobre una base elástica

En relación con la Figura (8), describimos en primer lugar la conservación de momentum de una viga delgada. Asumamos que la viga tiene un eje horizontal cuando no está cargada y que tiene propiedades materiales uniformes.

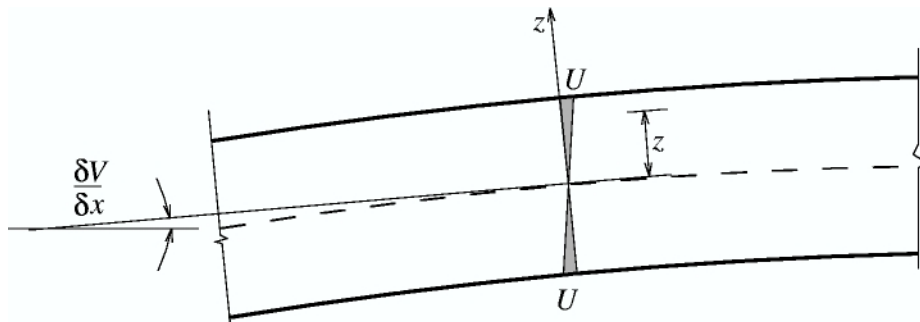


Figura 6: deflexión de una viga.

Supongamos que $V(x)$ indica la deflexión hacia arriba del eje de la viga. Si el grosor es pequeño comparado con la longitud y la deflexión pequeña comparada con el grosor,

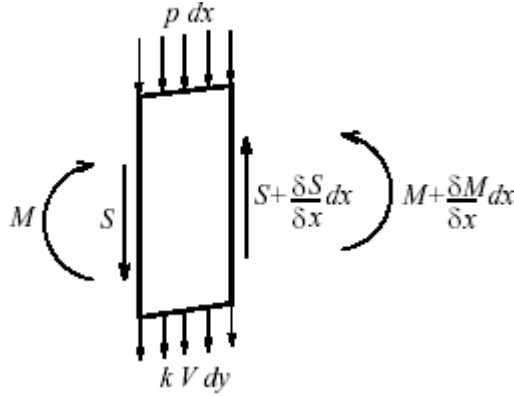


Figura 7: fuerzas y momentos en un segmento de viga a partir de x hasta $x + dx$.

una sección transversal plana permanece aproximadamente plana tras la deformación. De ahí que el desplazamiento longitudinal U en la sección x y altura z por encima del eje sea proporcional a z y al ángulo de inclinación $\partial V / \partial x$

$$U \cong -z \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Por lo tanto, la deformación es:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

y la tensión longitudinal es:

$$\sigma_x = E \frac{\partial U}{\partial x} = -Ez \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (9.1)$$

donde E es el módulo de Young. El momento total por la sección media $z = 0$ debido a la distribución de tensión por la sección es:

$$M = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = E \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (9.2)$$

donde,

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a su sección media $z = 0$. Tenga en cuenta un elemento de longitud de la viga a partir de x hasta $x + dx$, tal y como aparece en la Figura (7). El balance del momentum angular por el centro del elemento requiere que:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} + S \frac{dx}{2} = \rho J dx \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2},$$

donde ρ es la masa y ρJ es el momento rotatorio de inercia por unidad de longitud de la viga. Para una viga con sección transversal rectangular, $J = h^2/12$, donde h es la altura de la viga. Así,

$$S = -\frac{\partial M}{\partial x} + \rho J \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} = -EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \rho J \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2}, \quad (9.3)$$

Por otro lado, el balance de las fuerzas verticales requiere que:

$$S + \frac{\partial S}{\partial x} dx - S = p dx + kV dx + \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

donde k es la constante elástica del apoyo lateral, y $p(x, t)$ es la carga distribuida.

Utilizando (6.5.3), obtenemos:

$$\rho \left(1 - J \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + kV = -p(x, t), \quad (9.4)$$

que es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden, derivada por primera vez por Lord Rayleigh. Si la longitud de onda L es mucho mayor que la altura de la viga $h/L \ll 1$, entonces el término que representa la inercia rotatoria es insignificante y (6.5.4) se puede simplificar a:

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + kV = -p(x, t). \quad (9.5)$$

A continuación, las condiciones de frontera. Para una viga de longitud finita, cada extremo puede estar libre, inmovilizado o sujetado por un gozne. Si el extremo está libre, no hay momento torsor ni esfuerzo cortante.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 0. \quad (9.6)$$

En un extremo inmovilizado, la deflexión y la inclinación han de desvanecerse.

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (9.7)$$

En el extremo sujetado por un gozne tanto la deflexión como el momento torsor son cero.

$$V = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (9.8)$$

Para una viga infinitamente larga, las condiciones frontera en infinito dependen de la carga. Para una carga temporal con duración finita, V debería desvanecerse en distancias infinitas. Para una carga armónica temporal, la perturbación debería constituir al menos ondas salientes.

10 Trabajo en casa núm.1

1. Una membrana se mantiene tensa sobre un área S . La membrana tiene una densidad constante ρ por unidad de superficie y está en condiciones de tensión uniforme en todas direcciones. Obtenga la ecuación de gobierno correspondiente al desplazamiento lateral $u(x, y, t)$ de la membrana vibrando bajo la carga distribuida de $p(x, t)$ por unidad de superficie.

2. Tenga en cuenta la vibración longitudinal de una barra cilíndrica con un extremo fijo en $x = 0$ y el otro en $x = L$ unido a una masa M . Antes de que $t = 0$ la barra está comprimida por la longitud ϵL con $\epsilon \ll 1$. En $t = 0$ se libera la compresión. Indique la ecuación de gobierno y todas las condiciones iniciales y de frontera.

3. Tenga en cuenta la vibración torsional de una barra cilíndrica de sección cruzada circular y de radio a . Sea $\theta(x, t)$ = desplazamiento angular de la sección cruzada en x , $d\sigma$ = elemento de área en la sección cruzada y ubicado a la distancia r del eje, véase figura (). Sea τ la tensión de corte, G el módulo de rigidez de la elasticidad y ϕ el desplazamiento angular de una línea originalmente paralela al eje. Demuestre que:

$$\phi = r \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.1)$$

Invoque la ley de Hooke $\tau = G\phi$ y demuestre que el par de torsión total aplicado a la sección transversal en x es:

$$M = G \frac{\partial \theta}{\partial x} \iint_S r^2 d\sigma = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.2)$$

donde,

$$J = \iint_S r^2 d\sigma \quad (10.3)$$

es el momento polar de inercia de la sección cruzada. Sea I el momento de inercia por unidad de longitud de la barra. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GJ}{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10.4)$$

4. Durante un terremoto, el agua de un embalse ejerce una presión hidrodinámica sobre una presa que puede fallar. Formule el problema de interacción entre la presa y el embalse en virtud de las siguientes hipótesis idealizadas. El embalse tiene una longitud infinita y una sección cruzada rectangular uniforme.

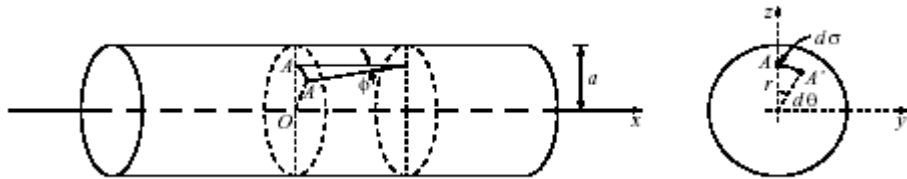


Figura 8: torsión de un cilindro circular.

Sólo hay agua en un lado de la presa ($x > 0$) que tiene una profundidad constante h . Antes de que $t = 0$, todo está en calma. Tras $t = 0$ la presa está forzada a vibrar horizontalmente, de modo que:

$$u(0, y, z, t) = \begin{cases} u_o(y, z, t) = \text{prescrito}, & 0 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (10.5)$$

La superficie libre está expuesta a una presión atmosférica constante. El fondo del embalse es rígido y no vibra horizontalmente (¡menuda idealización!). No tenga en cuenta la gravedad, pero sí la compresibilidad del agua debido a la alta frecuencia ($\sim O(100)\text{Hz}$). Exprese todas las ecuaciones de gobierno incluidas las condiciones de frontera en términos

del potencial de velocidad ϕ definido por $(u, v, w) = \nabla \phi$.