1.138J/2.062J, PROPAGACIÓN DE ONDAS

Otoño 2000 MIT

Trabajo para casa núm. 3. Fecha de entrega: 12/10/2000.

(1). Lea las notas de la sección 2.8. Para una barra ligeramente no uniforme, compruebe si la ecuación que rige en $O(\epsilon^2)$ para U_2 es:

$$ES_o\frac{d^2U_2}{\partial x^2}+\rho\omega^2 S_0 U_2 = ES_o\left[a\frac{da}{dx}\frac{dU_0}{dx}-\frac{da}{dx}\frac{dU_1}{dx}\right] \quad \text{(H.3.1)}$$

Lleve a cabo la solución para hallar el coeficiente de transmisión T desde la amplitud de $U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2$ en $x \sim \infty$, y demuestre que la energía se conserva en el orden $O(\epsilon^2)$.

La solución que damos aquí se basa en los conocimientos de Diane Jarrah, Francois Blanchette, Lixian Liu y Guangyu Wu

Sea

$$U_0+\epsilon U_i+\epsilon^2 U_2+\cdots \quad \text{(H.3.2)}$$

entonces

$$U_0 = Ae^{ikx}, \quad \text{(H.3.3)}$$

$$U_1=\frac{A}{2}\left[e^{-ikx}\int_x^\infty e^{-2ik\xi}a_\xi d\xi + a(x)e^{ikx}\right] \quad \text{(H.3.4)}$$

Sea

$$R=\epsilon R_1+\epsilon R_2+\cdots,\quad T=1+\epsilon T_1+\epsilon^2 T_2+\cdots \quad \text{(H.3.5)}$$

Claramente

$$U_1(\infty)=T_1=0, \quad \text{(H.3.6)}$$

$$R_1=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-2ik\xi}a_\xi d\xi = ik\int_x^\infty e^{-2ik\xi}a(\xi)d\xi \quad \text{(H.3.7)}$$

Para la conservación del flujo de energía $RR^*+TT^*=1$, necesitamos

$$1=\epsilon^2 R_1R_1^*+\cdots+(1+\epsilon^2 T_1+\cdots)(1+\epsilon^2 T_2^*+\cdots)=\epsilon^2 R_1R_1^*+\cdots 1+\epsilon^2(T_2+T_2^*)+\cdots \quad \text{(H.3.8)}$$

De ahí que necesitemos probar que

$$R_1R_1^*+T_2+T_2^*=0 \quad \text{(H.3.9)}$$

— — — — — — — — — — — — —

Utilizando la función de Green

$$
\begin{aligned}
U_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2ik} e^{ik|x-\xi|} a_\xi \left(a\frac{dU_0}{d\xi} - \frac{dU_1}{d\xi} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2ik} e^{ik|x-\xi|} a_\xi \left(aikAe^{ik\xi} - \frac{A}{2} \left\{ ike^{-ik\xi} \int_\xi^\infty a_\eta e^{2ik\eta} d\eta + ikae^{ik\xi} \right\} \right] \\
&= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik|x-\xi|} a_\xi \left(\frac{a}{2} e^{ik\xi} - \frac{e^{-ik\xi}}{2} \int_\xi^\infty a_\eta e^{2ik\eta} d\eta \right) \\
&= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{x} d\xi a_\xi \left(\frac{a}{2} - \frac{e^{-2ik\xi}}{2} \int_\xi^\infty a_\eta e^{2ik\eta} d\eta \right) \\
&+ \frac{A}{2} \int_0^\infty a_\xi \left(\frac{a}{2} e^{2ik\xi} - \frac{1}{2} \int_\xi^\infty a_\eta e^{2ik\eta} d\eta \right) \qquad \text{(H.3.10)}
\end{aligned}
$$

Integrando por partes

$$
\int_\xi^\infty d\xi e^{2ik\xi} a_\xi = ae^{2ik\xi}|_\xi^\infty - 2ik \int_\xi^\infty e^{2ik\eta a} d\eta
$$