

Proyecto del campus I
Programa universitario sobre mecánica de fluidos
Módulos sobre ondas en fluidos

T. R. Akylas y C. C. Mei

CAPÍTULO SEIS
ONDAS DISPERSIVAS FORZADAS POR UN CANAL ESTRECHO

Las ondas de gravedad de superficie lineal que se propagan por un canal estrecho presentan un fenómeno interesante. En primer lugar, tenemos en cuenta las ondas libres que se propagan por un canal estrecho infinito. Damos la solución de este problema como una superposición de modos de onda e ilustramos conceptos como la noción de frecuencia de corte. En segundo lugar, consideramos un canal semi-infinito con ondas forzadas estimuladas por un productor de ondas ubicado al final del canal. Como en el caso anterior, el campo de onda generado por el aparato se puede describir como una superposición de modos de onda. A medida que empieza a estimular el fluido, se crea un frente de onda y comienza a propagarse por el canal si la frecuencia de excitación está por encima de la frecuencia de corte para el modo de onda del primer canal. Si la frecuencia de excitación está por debajo de la frecuencia de corte para el modo del primer canal, la perturbación de onda permanece localizada cerca del creador de ondas, y para el caso especial en el que la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural de los modos de onda de un canal particular, existe resonancia entre este modo de onda especial y el productor de ondas, y la amplitud de onda en el aparato que las crea aumenta con el tiempo.

No se tienen en cuenta los efectos de la no linealidad y la disipación. En este capítulo, obtenemos e ilustramos a través de animaciones la evolución del desplazamiento de superficie libre en el tiempo a lo largo de un canal estrecho semi-infinito excitado por un aparato creador de ondas en uno de sus extremos.

1 Propagación de onda libre por un guíaondas estrecho.

Tengamos en cuenta ondas libres propagándose por un canal infinito de profundidad h y anchura $2b$. Adoptemos un sistema de coordenadas x, y, z , donde x y z están en el plano horizontal e y es la coordenada vertical. El eje x va a lo largo del canal, las paredes laterales

están ubicadas en $z = \pm b$ y la parte inferior es el plano $y = -h$. La superficie libre está localizada en $y = \eta(x, z, t)$, que es desconocida. Supongamos un flujo irrotacional y un fluido incompresible, de modo que el campo de velocidad pueda darse como el gradiente de una función potencial $\phi(x, y, z, t)$, donde t es la parametrización temporal. El problema linealizado de valor de frontera para la propagación de ondas libres viene dado por el conjunto de ecuaciones:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0 \text{ for } -\infty < x < \infty, -h < y < 0 \text{ and } -b < z < b, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = -h, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ at } z = \pm b, \quad (1.4)$$

y por condiciones de radiación apropiadas. Se trata de un problema de valor de frontera que puede resolverse mediante la técnica de la separación de variables. En primer lugar, asumimos que las ondas libres que se propagan por el canal vienen dadas como una superposición de ondas monocromáticas planas. Debido a la linealidad del problema de valor de frontera, sólo necesitamos resolverlo para una onda plana monocromática con frecuencia de onda ω . La dependencia temporal es:

$$\exp(-i\omega t),$$

y ahora podemos escribir la función potencial $\phi(x, y, z, t)$ y el desplazamiento de superficie libre $\eta(x, z, t)$ en la forma:

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \exp(-i\omega t), \quad (1.5)$$

$$\eta(x, z, t) = \eta(x, z) \exp(-i\omega t). \quad (1.6)$$

A continuación, el problema de valor de frontera dado por las ecuaciones (1.1) a (1.4) supone la forma:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \text{ for } -\infty < x < \infty, -h < y < 0 \text{ and } -b < z < b, \quad (1.7)$$

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = -h, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ at } z = \pm b, \quad (1.10)$$

donde hemos eliminado el desplazamiento de superficie libre $\eta(x, z)$ y reducido el problema de valor de frontera a un problema en una variable dependiente, $\phi(x, y, z)$. A continuación, aplicamos la técnica de separación de variables para resolver el problema de valor de frontera dado por las ecuaciones (1.7) a (1.10). Asumimos la función potencial $\phi(x, y, z)$ dada como:

$$\phi(x, y, z) \sim \exp(\pm ik_x x) \begin{pmatrix} \sin(k_z z) \\ \cos(k_z z) \end{pmatrix} H(y), \quad (1.11)$$

donde los valores posibles de k_z están determinados por la condición de frontera en las paredes del canal ubicadas en $z = \pm b$, y los posibles valores de la constante k se debaten más adelante. Si sustituimos la expresión dada por la ecuación (1.11) el problema de valor de frontera dado por las ecuaciones (1.7) a (1.10), obtenemos un problema Sturm-Liouville (problema unidimensional de valor de frontera con una ecuación diferencial de segundo orden) para la función $H(y)$, que viene dado por las ecuaciones:

$$H_{yy} + \Lambda H(y) = 0, \quad (1.12)$$

$$-\omega^2 H(y) + g H_y = 0 \text{ at } y = 0, \quad (1.13)$$

$$H_y = 0 \text{ at } y = -h, \quad (1.14)$$

donde $\Lambda^2 = -k_z^2 + k^2$. La constante Λ representa un conjunto de autovalores, que son funciones de la frecuencia de onda ω , de la aceleración de gravedad g y de la profundidad h .

Si aplicamos las condiciones de contorno dadas por la ecuación (1.10) a la función potencial $\phi(x, y, z)$, nos damos cuenta de que podemos utilizar bien $\cos(k_z z)$ o $\sin(k_z z)$ en la expresión para $\phi(x, y, z)$ dada por la ecuación (1.11), pero con un conjunto diferente de valores posibles para la constante k_z . El conjunto de valores para k_z viene determinado por

la condición de frontera (1.10) y la elección entre $\cos(k_z z)$ y $\sin(k_z z)$. Si consideramos la dependencia de z del potencial $\phi(x, y, z)$ dada en los términos de $\cos(k_z z)$, la constante k_z ha de asumir los valores:

$$k_{zn} = \frac{\pi}{2b} \pm \frac{\eta\pi}{b} \text{ con } n \text{ como un número natural.} \quad (1.15)$$

Si tenemos en cuenta la dependencia de z del potencial $\phi(x, y, z)$ dada en términos de $\sin(k_z z)$, la constante k_z ha de asumir los valores:

$$k_{zm} = \pm \frac{m\pi}{b} \text{ con } m \text{ como un número natural} \quad (1.16)$$

La forma general de la solución para la ecuación (1.12) es

$$H(y) = A \cosh(\Lambda(y+h)) + B \sinh(\Lambda(y+h)), \quad (1.17)$$

pero la condición de frontera sobre el fondo dada por la ecuación (1.14) implica que $B = 0$. La condición de frontera en la superficie libre ($y = 0$) da la ecuación de autovalor o la *relación de dispersión*:

$$\omega^2 = g\Lambda \tanh(\Lambda h) \quad (1.18)$$

para la constante Λ . Esta ecuación implícita de autovalor tiene una solución real Λ_0 y un conjunto contable infinito de autovalores puramente imaginarios $i\Lambda_l, l = 1, 2, \dots$. Asociadas con estos autovalores tenemos las autofunciones:

$$H_0(y) = \frac{\cosh(\Lambda_0(y+h))}{\cosh(\Lambda_0 h)}, \quad (1.19)$$

$$H_l(y) = \frac{\cos(\Lambda_l(y+h))}{\cos(\Lambda_l h)}, \text{ with } l = 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

El término $\exp(ikx)(\exp(-ikx))$ en la ecuación (1.11) anterior para $\phi(x, y, z)$ representa una

onda que se propaga a la derecha (izquierda) si la constante k es real, o una onda derecha (izquierda) evanescente si k es un número puramente imaginario, o una combinación de ambos si k es complejo. Etiquetamos la constante k como el *número de onda*. Como estamos interesados en ondas que se propagan libremente, necesitamos que la constante k sea un número real. El valor de este constante viene dado en cuanto a las constantes Λ y k_z , según la ecuación:

$$k^2 = \Lambda^2 - k_z^2, \quad (1.21)$$

donde los valores posibles de k_z vienen dados por las ecuaciones (1.15) y (1.16). Los valores posibles de Λ son soluciones de la *relación de dispersión* dada por la ecuación (1.18). Como queremos que k sea un número real, esto excluye las soluciones imaginarias de (1.18), así que podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$k_n = \Lambda_0^2 - k_{zn}^2, \quad (1.22)$$

$$k_m = \Lambda_0^2 - k_{zm}^2, \quad (1.23)$$

donde hemos añadido los índices n y m a la constante k para resaltar su dependencia de los autovalores k_{zn} y k_{zm} .

Ahora podemos escribir la función potencial $\phi(x, y, z)$ en la forma:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ [A_m \exp(ik_{zm}x) + B_m \exp(-ik_{zm}x)] \frac{\cosh(\Lambda_0(y+h))}{\cosh(\Lambda_0 h)} \sin(k_{zm}z) \right\} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [A_n \exp(ik_{zn}x) + B_n \exp(-ik_{zn}x)] \frac{\cosh(\Lambda_0(y+h))}{\cosh(\Lambda_0 h)} \cos(k_{zn}z) \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

y el desplazamiento de superficie libre $\eta(x, z)$ viene dado por la ecuación:

$$\eta(x, z) = -\frac{i\omega}{g} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[(A_m \exp(ik_m x) + B_m \exp(-ik_m x)) \frac{\cosh(\Lambda_0(y+h))}{\cosh(\Lambda_0 h)} \sin(k_{zm} z) \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(A_n \exp(ik_n x) + B_n \exp(-ik_n x)) \frac{\cosh(\Lambda_0(y+h))}{\cosh(\Lambda_0 h)} \cos(k_{zn} z) \right] \right\}, \quad (1.25)$$

donde el valor de las constantes A_m , A_n , B_m y B_n viene especificado por las condiciones de radiación apropiadas.

Según el valor de k_{zm} o k_{zn} , las constantes k_m y k_n en las ecuaciones (1.24) y (1.25) pueden ser verdaderos (modo de ondas de propagación) o números imaginarios puros (modo de onda evanescente). Si fijamos el valor de k_{zm} o k_{zn} (fijar el valor de m o n), para una profundidad dada h , podemos variar la frecuencia de onda ω de modo que $\Lambda_0 > k_{zm}(k_{zn})$ o $\Lambda_0 < k_{zm}(k_{zn})$. Cuando $\Lambda_0 > k_{zm}(k_{zn})$, $k_m(k_n)$ es un número verdadero y tenemos un modo de ondas de propagación, pero cuando $\Lambda_0 < k_{zm}(k_{zn})$ tenemos que $k_m(k_n)$ es un número imaginario puro y el modo de onda asociado con este valor de k es evanescente. Así, al valor de la frecuencia de onda donde $k_{zm} = \Lambda_0$ ($k_{zn} = \Lambda_0$) se llama la *frecuencia de corte* para el m-ésimo (n-ésimo) modo de onda.

A continuación, trazamos la relación de dispersión dada por la ecuación (1.18) en función del número de onda k y la profundidad h para diversos valores de los autovalores k_{zm} (modos de onda sinusoidal en la coordenada z) en las figuras 1 y 2. A medida que el valor de k_{zm} aumenta (el valor de m disminuye), la frecuencia de onda asume valores mayores para el espectro considerado del número de onda k . El valor de frecuencia de onda en $k = 0$ para un valor dado k_{zm} (dado m) es la *frecuencia de corte* para el modo de onda asociado con el autovalor k_{zm} . Para un valor fijo de k_{zm} , las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte suponen números de onda imaginarios puros y el modo de onda asociado disminuye exponencialmente (evanescente) o crece exponencialmente. Los modos de ondas asociados con números de onda imaginarios puros no participan en la superposición que da lugar a las soluciones de ondas libres. Según las figuras 1 y 2, cuanto más alta es la frecuencia de onda, mayor el número de modos de onda que participan en la superposición que da lugar a las soluciones de ondas libres.

Otra forma de ver que los modos de onda asociados con números de onda imaginarios

(onda por debajo del modo de onda de *frecuencia de corte*) no se propagan es a través de la velocidad de grupo del modo de onda. En las figuras 3 y 4, trazamos la velocidad de grupo para los 10 primeros modos de onda asociados con los autovalores k_{zm} (m de 0 a 9). Para frecuencias de onda por encima de la frecuencia de corte, el modo de onda tenido en cuenta (valor fijo de k_{zm}) tiene un número de onda verdadero k y velocidad de grupo no cero, como podemos ver en las figuras 3 y 4. A medida que la frecuencia de onda se aproxima a la *frecuencia de corte*, la velocidad de grupo del modo de onda tenido en cuenta se aproxima a cero, según las figuras 3 y 4. En la *frecuencia de corte* del modo de onda considerado, su velocidad de grupo es cero y este modo de onda no transporta energía para frecuencias que coincidan o estén por debajo de la frecuencia de corte.

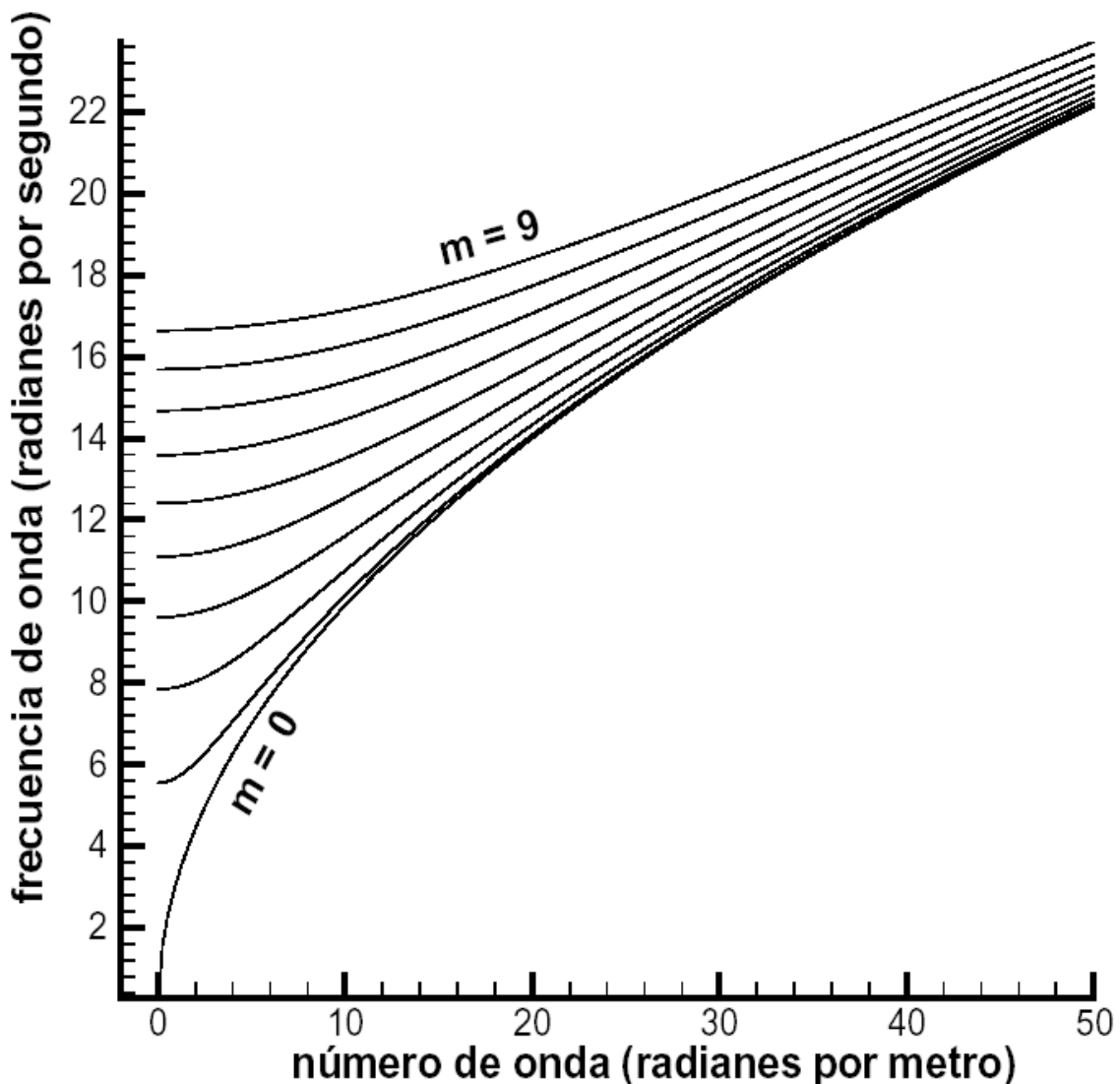


Figura 1: frecuencia de onda en función del número de onda k para varios valores del autovalor k_{zm} y la profundidad del agua $h = 100$ metros.

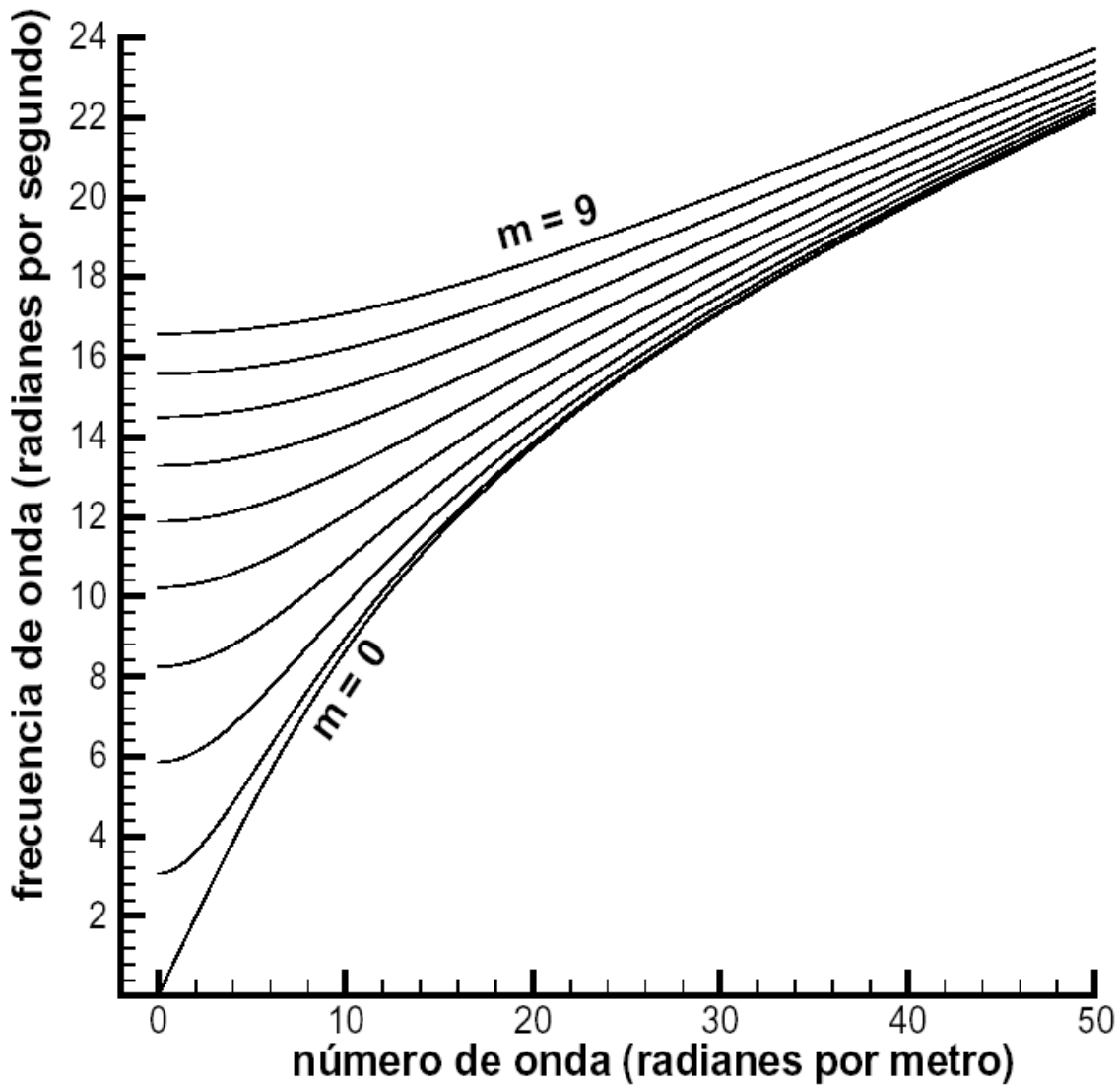


Figure 2: frecuencia de onda en función del número de onda k para varios valores del autovalor k_{zm} , y la profundidad del agua $h = 0,1$ metros.

Según las figuras 3 y 4, la velocidad de grupo de cada modo de onda tiene un valor máximo, que disminuye a medida que el valor de k_{zm} aumenta (valor de m aumenta). El primer modo de onda (modo de onda sinusoidal con $k_z = 0$) tiene la mayor velocidad de grupo máxima, y como su *frecuencia de corte* es cero, podemos tener ondas que se

propagan libres en cualquier frecuencia de onda para el canal especificado por su profundidad h , su anchura $2b$ y la aceleración de gravedad g . Por encima, hemos analizado los modos de onda con dependencia sinusoidal en la coordenada z . Para los modos de onda con dependencia del coseno en la coordenada z , el valor absoluto mínimo del autovalor k_{z7} , es mayor que el valor absoluto mínimo para los autovalores k_{zm} , que es cero. Por lo tanto, para cualquier frecuencia de onda tenemos ondas libres que se propagan por el canal. Para los modos de onda de coseno hay una *frecuencia de corte* mínima. La propagación de este tipo de modo de ondas es sólo posible por frecuencias de ondas por encima de su *frecuencia de corte* mínima.

2 Propagación de ondas forzadas por un guíaondas estrecho.

A continuación, tenemos en cuenta ondas forzadas que se propagan por un canal semi-infinito con la misma profundidad h y anchura $2b$ que en el canal anterior. El canal semi-infinito tiene un creador de ondas en uno de sus bordes, el cual genera perturbaciones de onda que puede que se propaguen por el canal, o puede que no. La solución para las ondas forzadas se da como una superposición de modos de onda. Los mismos modos que obtuvimos en la sección anterior. Los modos evanescentes son también parte de la solución en este caso. Permanecen localizados cerca del creador de ondas y describen el campo de onda local. Para una excitación monocromática, los modos de onda con *frecuencia de corte* por debajo de la frecuencia de excitación constituyen el campo de onda de propagación, y los modos de onda con *frecuencia de corte* por encima de la frecuencia de excitación son evanescentes y permanecen localizados cerca del creador de ondas. Su superposición de el campo de onda evanescente.

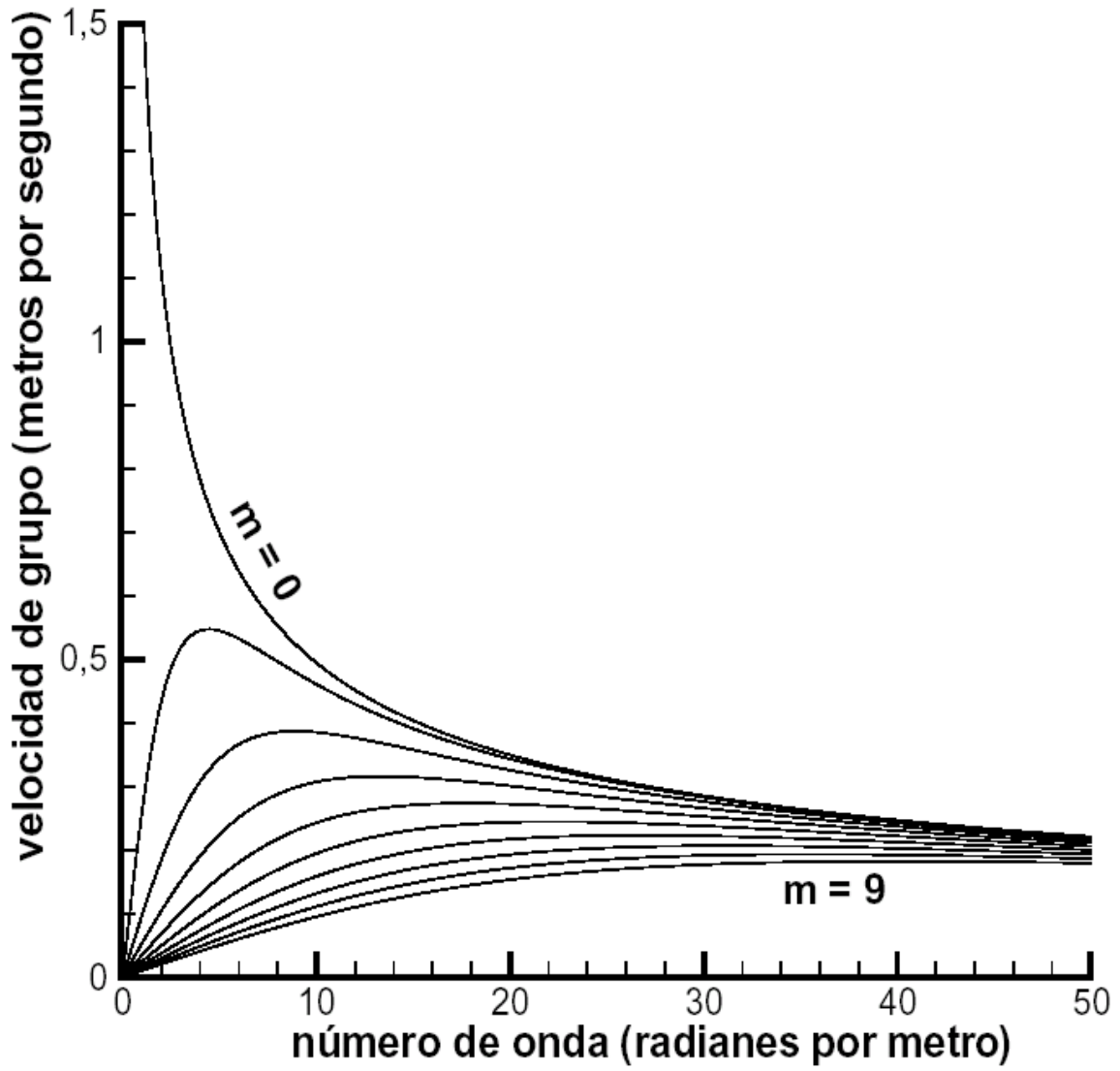


Figura 3: velocidad de grupo en función del número de onda k para varios valores del autovalor k_{zm} , y profundidad de agua $h = 100$ metros.

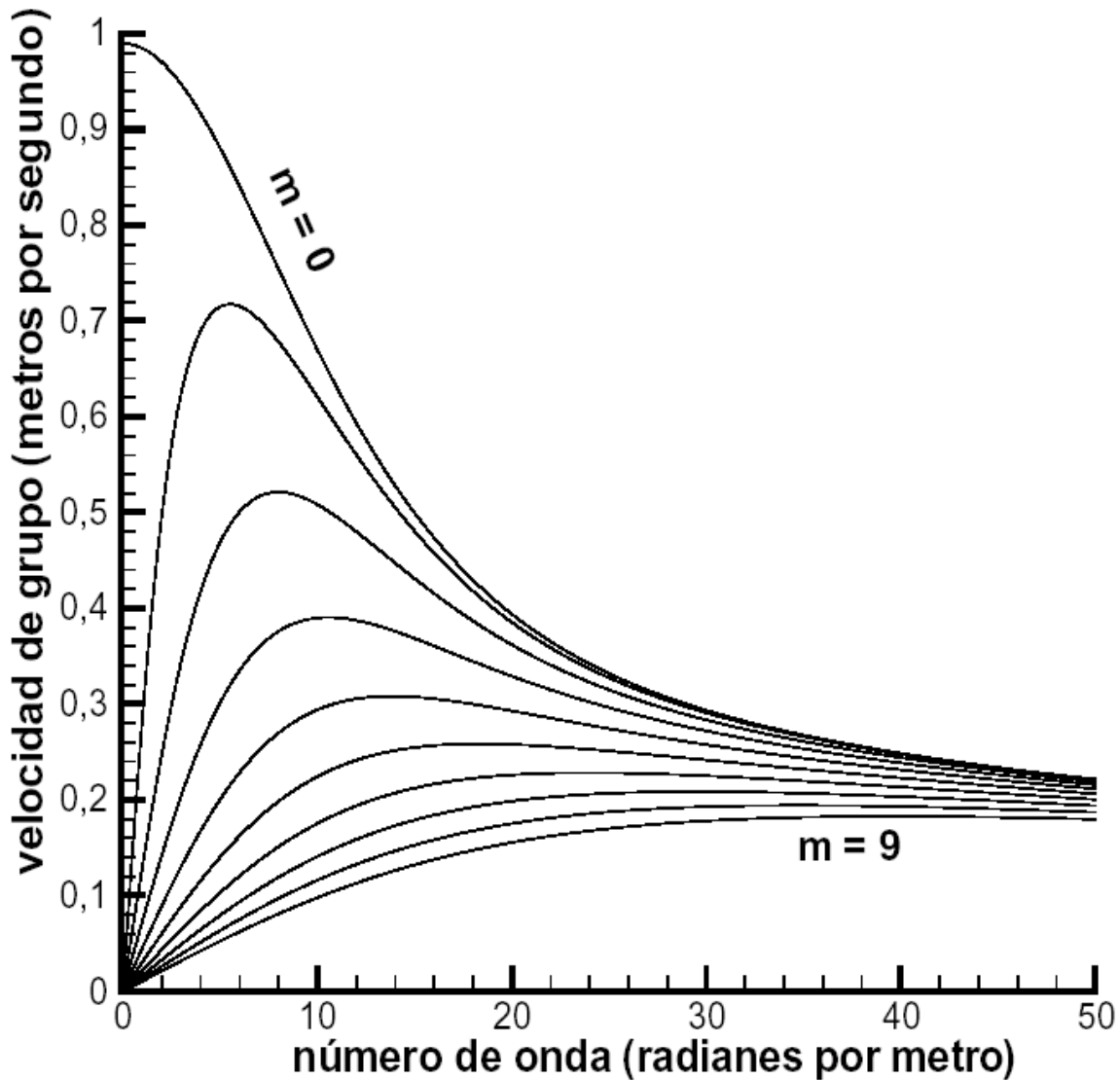


Figura 4: velocidad de grupo en función del número de onda k para varios valores del autovalor k_{zm} , y profundidad de agua $h = 0,1$ metros.

3 Problema de valor inicial y de frontera.

Tenemos en cuenta el mismo sistema de coordenadas que en la sección anterior. El creador de ondas está localizado en $x = 0$ y el canal está en $x > 0$. El problema linealizado de valor de frontera para las ondas forzadas es similar al problema de valor de frontera para las ondas libres. La diferencia es la condición de frontera que describe el efecto del creador de ondas y el hecho de que el canal es ahora semi-infinito. El problema lineal de valor de

frontera para ondas forzadas viene dado por el conjunto de ecuaciones:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0 \text{ for } 0 < x < \infty, -h < y < 0 \text{ and } -b < z < b, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = -h, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ at } z = \pm b, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\omega A}{b} F(z) G(y) f(t) \text{ on } x = 0, \quad (3.30)$$

y el desplazamiento de superficie libre $\eta(x, z, t)$ está relacionado con la función potencial $\phi(x, y, z, t)$ según la ecuación:

$$\eta(x, z, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, z, t). \quad (3.31)$$

La función $f(t)$ es una función conocida de tiempo. En realidad, hemos elegido una excitación armónica, con lo que tenemos:

$$f(t) = \cos(\omega t), \quad (3.32)$$

donde ω es la frecuencia de excitación. También hemos de tener en cuenta las condiciones iniciales para el problema de valor de frontera mencionado. Vienen dadas por las ecuaciones:

$$\phi(x, y, z, 0) = 0, \quad (3.33)$$

$$\phi_t(x, y, z, 0) = 0, \quad (3.34)$$

donde la condición inicial (3.34) es equivalente a tener una superficie libre quieta en $t = 0$ ($\eta(x, z, 0) = 0$). A continuación, resolvemos el problema de valor inicial y de frontera, que se explica en la sección siguiente.

3.1 Solución al problema de valor inicial y de frontera.

EL primer paso para resolver el problema de valor inicial y de frontera dado por las ecuaciones (3.26) a (3.30) es aplicar la transformada del coseno en la variable x , lo que resulta en una ecuación no homogénea del tipo Helmholtz para la función potencial bajo

condiciones de contorno homogéneas. Como la ecuación resultante es no homogénea, la solución viene dada como la superposición de la solución para la parte homogénea del problema más una solución particular que se encarga de la no homogeneidad. Para resolver el problema homogéneo asociado, utilizamos el método de separación de variables como en la sección anterior. La solución del problema homogéneo se da como una superposición de modos en las variables y y z . La solución particular se obtiene utilizando la solución homogénea a través del método de variación de los parámetros. Las constantes de la solución homogénea se obtienen aplicando las condiciones de frontera a la solución completa (soluciones homogéneas más particulares). A continuación, discutimos en detalle los pasos descritos anteriormente.

Tengamos en cuenta el par de transformadas de coseno,

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \quad (3.35)$$

y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(k) \cos(kx) dk. \quad (3.36)$$

Si aplicamos la transformada de coseno (3.36) a la segunda derivada parcial de la función potencial $\phi(x, y, z, t)$ con respecto a la variable x , tenemos que:

$$\int_0^{\infty} \phi_{xx} \cos(kx) dx = -\phi_x(0, y, z, t) - k^2 \tilde{\phi}(k, y, z, t), \quad (3.37)$$

ya que asumimos que $\phi_x \rightarrow 0$ y $\phi \rightarrow 0$ como $x \rightarrow \infty$. El término $\phi_x(0, y, z, t)$ está especificado por la condición de contorno en $x = 0$ y dado por la ecuación (3.30). A continuación, aplicamos la transformada de coseno al problema de valor inicial y de frontera dado por las ecuaciones (3.26) a (3.30). Lo que da como resultado el conjunto de ecuaciones:

$$\ddot{\phi}_{yy} + \ddot{\phi}_{zz} - k^2 \ddot{\phi} = \phi_x(0, y, z, t) = \frac{A\omega}{b} F(z)G(y) \cos(\omega t), \quad (3.38)$$

$$\ddot{\phi}_{zz} + g\phi_y = 0 \text{ en } y = 0, \quad (3.39)$$

$$\ddot{\phi}_y = 0 \text{ en } y = -h, \quad (3.40)$$

$$\ddot{\phi}_z = 0 \text{ en } z = \pm b, \quad (3.41)$$

con las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones (3.33) y (3.34) escritas en la forma:

$$\ddot{\phi}(k, y, z, 0) = 0, \quad (3.42)$$

$$\ddot{\phi}_t(k, y, z, 0) = 0. \quad (3.43)$$

Esto es un problema de valor inicial y de frontera no homogéneo para la función $\hat{\phi}(k, y, z, t)$ (transformada de coseno de $\phi(x, y, z, t)$). Nuestra estrategia para resolver este problema de valor inicial y de frontera es hallar la forma general de la solución de la parte homogénea del problema de valor inicial y de frontera dado por las ecuaciones (3.38) a (3.41) más una solución particular para la parte no homogénea de este problema de valor inicial y de frontera. Para hallar el valor de las constantes de la parte homogénea de la solución, aplicamos las condiciones iniciales y de frontera a la solución completa (homogénea más particular). Posteriormente, consideramos la parte homogénea del problema de valor inicial y de frontera para $\hat{\phi}$, que se da como la superposición de modos de onda obtenidos en la sección anterior. Así, la solución del problema homogéneo es similar a la dada por la ecuación (1.24). La solución para el problema homogéneo es:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_H = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ [A_m(k, t) \cosh(\Lambda_m(y+h)) + B_m(k, t) \sinh(\Lambda_m(y+h))] \cos(k_{zm}z) \} \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ [C_m(k, t) \cosh(\Lambda_m(y+h)) + D_m(k, t) \sinh(\Lambda_m(y+h))] \sin(k_{zm}z) \}, \end{aligned}$$

donde $\Lambda_m^2 = k^2 + k_{zm}^2$, $\Lambda_n^2 = k^2 + k_{zn}^2$, y k_{zn} y k_{zm} se dan respectivamente en las ecuaciones (1.16) y (1.15). Como mencionamos antes, la solución general viene dada como una superposición de la solución homogénea $\hat{\phi}_H$ más una solución particular. Suponemos que la solución particular tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_P &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\bar{A}_n(k, y, t) \cosh(\Lambda_n(y+h)) + \bar{B}_n(k, y, t) \sinh(\Lambda_n(y+h)) \right] \cos(k_{zn}z) \right\} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\bar{C}_m(k, y, t) \cosh(\Lambda_m(y+h)) + \bar{D}_m(k, y, t) \sinh(\Lambda_m(y+h)) \right] \sin(k_{zm}z) \right\}.\end{aligned}$$

Sustituimos el potencial $\hat{\phi}_p$ en la ecuación Helmholtz no homogénea (3.38) en las variables y y z . También imponemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\phi}_P}{\partial y} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \Lambda_n \left[\bar{A}_n \sinh(\Lambda_n(y+h)) + \bar{B}_n \cosh(\Lambda_n(y+h)) \right] \cos(k_{zn}z) \right\} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \Lambda_m \left[\bar{C}_m \sinh(\Lambda_m(y+h)) + \bar{D}_m \cosh(\Lambda_m(y+h)) \right] \sin(k_{zm}z) \right\}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

El procedimiento anterior da como resultado el conjunto de ecuaciones para las amplitudes:

$\bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_m$ y \bar{D}_m .

$$(\bar{A}_n)_y \cosh(\Lambda_n(y+h)) + (\bar{B}_n)_y \sinh(\Lambda_n(y+h)) = 0, \quad (3.45)$$

$$(\bar{C}_m)_y \cosh(\Lambda_m(y+h)) + (\bar{D}_m)_y \sinh(\Lambda_m(y+h)) = 0, \quad (3.46)$$

$$\Lambda_n \left\{ (\bar{A}_n)_y \sinh(\Lambda_n(y+h)) + (\bar{B}_n)_y \cosh(\Lambda_n(y+h)) \right\} = \frac{A\omega}{l^2} G(y) \cos(\omega t) F_n, \quad (3.47)$$

$$\Lambda_m \left\{ (\bar{C}_m)_y \sinh(\Lambda_m(y+h)) + (\bar{D}_m)_y \cosh(\Lambda_m(y+h)) \right\} = \frac{A\omega}{l^2} G(y) \cos(\omega t) F_m, \quad (3.48)$$

donde,

$$F_m = \int_{-b}^b F(z) \sin(k_{zm}z) dz, \quad (3.49)$$

$$F_n = \int_{-b}^b F(z) \cos(k_{zn}z) dz. \quad (3.50)$$

Si resolvemos el conjunto de ecuaciones anterior e integramos con respecto a la variable y desde $-h$ a 0 , obtenemos las siguientes expresiones para las amplitudes

$\bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n$ y \bar{D}_n , de lo que se desprende:

$$\bar{A}_n = -\frac{A\omega}{b^2\Lambda_n} \cos(\omega t) F_n G_n(y), \quad (3.51)$$

$$\bar{B}_n = \frac{A\omega}{b^2\Lambda_n} \cos(\omega t) F_n H_n(y), \quad (3.52)$$

$$\bar{C}_m = -\frac{A\omega}{b^2\Lambda_m} \cos(\omega t) F_m G_m(y), \quad (3.53)$$

$$\bar{D}_m = \frac{A\omega}{b^2\Lambda_m} \cos(\omega t) F_m H_m(y), \quad (3.54)$$

donde las funciones $G_n(y)$, $H_n(y)$, $G_m(y)$ y $H_m(y)$ están dadas por las ecuaciones:

$$G_n(y) = \int_{-h}^y G(p) \sinh(\Lambda_n(p+h)) dp, \quad (3.55)$$

$$H_n(y) = \int_{-h}^y G(p) \cosh(\Lambda_n(p+h)) dp, \quad (3.56)$$

$$G_m(y) = \int_{-h}^y G(p) \sinh(\Lambda_m(p+h)) dp, \quad (3.57)$$

$$H_m(y) = \int_{-h}^y G(p) \cosh(\Lambda_m(p+h)) dp. \quad (3.58)$$

A continuación, la solución total $\hat{\phi}(k, y, z)$ se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\left(A_n - \frac{A\omega}{b^2\Lambda_n} \cos(\omega t) F_n G_n(y) \right) \cosh(\Lambda_n(y+h)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(B_n + \frac{A\omega}{b^2\Lambda_n} \cos(\omega t) F_n H_n(y) \right) \sinh(\Lambda_n(y+h)) \right] \cos(k_{zn}z) \right\} \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\left(C_m - \frac{A\omega}{b^2\Lambda_m} \cos(\omega t) F_m G_m(y) \right) \cosh(\Lambda_m(y+h)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(D_m + \frac{A\omega}{b^2\Lambda_m} \cos(\omega t) F_m H_m(y) \right) \sinh(\Lambda_m(y+h)) \right] \sin(k_{zm}z) \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

En la expresión anterior aún tenemos que obtener las constantes A_m , B_m , C_n y D_n de la parte homogénea de la solución. Para ello, aplicamos las condiciones de frontera (3.39) en $y = 0$ y (3.40) en $y = -h$. La condición de frontera en $y = -h$, dada por la ecuación (3.40), supone que $D_m = 0$ ($B_n = 0$). La condición de frontera en $y = 0$ da la ecuación:

$$\begin{aligned} (A_n)_{yz} + g\Lambda_n \tanh(\Lambda_n h) A_n = & \frac{A F_n}{b^2 \Lambda_n} \{ \omega^3 \cos(\omega t) [H_n(0) \tanh(\Lambda_n h) - G_n(0)] \\ & + g\Lambda_n \omega \cos(\omega t) [G_n(0) \tanh(\Lambda_n h) - H_n(0)] \}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

También obtenemos una ecuación similar para C_m . Esta es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea a tiempo para la amplitud A_n . Su solución viene dada como la superposición de la solución de la parte homogénea de la ecuación más una solución particular que satisface el término no homogéneo de la ecuación (3.60). La solución homogénea se da como:

$$(A_n(t))_H = \tilde{A} \cos(\Omega_n t) + \tilde{B} \sin(\Omega_n t) \quad (3.61)$$

con $\Omega_n^2 = g\Lambda_n \tanh(\Lambda_n h)$. Asumimos la solución particular dada en la forma:

$$(A_n(t))_P = \tilde{A}(t)_P \cos(\Omega t) + \tilde{B}(t)_P \sin(\Omega t). \quad (3.62)$$

Imponemos que:

$$\frac{d}{dt}(A_n(t))_P = \Omega_n \left\{ -\tilde{A}(t)_P \sin(\Omega t) + \tilde{B}(t)_P \cos(\Omega t) \right\}. \quad (3.63)$$

Si sustituimos la forma de la solución particular, dada por la ecuación (3.62) en la ecuación de gobierno (3.61) y tomamos en cuenta la forma asumida para $\frac{d}{dt}(A_n(t))_P$, dada por la ecuación (3.63), obtenemos para las amplitudes $\hat{A}(t)_P$ y $\hat{B}(t)_P$ las expresiones:

$$\tilde{A}(t)_P = \frac{1}{2} \frac{\psi(\omega, \Omega_n, h)}{\Omega_n} \left\{ \frac{\cos[(\Omega_n - \omega)t]}{\Omega_n - \omega} + \frac{\cos[(\Omega_n + \omega)t]}{\Omega_n + \omega} \right\}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{B}(t)_P = \frac{1}{2} \frac{\psi(\omega, \Omega_n, h)}{\Omega_n} \left\{ \frac{\sin[(\Omega_n - \omega)t]}{\Omega_n - \omega} + \frac{\sin[(\Omega_n + \omega)t]}{\Omega_n + \omega} \right\}. \quad (3.65)$$

donde,

$$\begin{aligned} \psi(\omega, \Omega_n, h) = & \frac{A F_n}{b^2 \Lambda_n} \{ \omega^3 [H_n(0) \tanh(\Lambda_n h) - G_n(0)] \\ & + g\Lambda_n \omega [G_n(0) \tanh(\Lambda_n h) - H_n(0)] \} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Si sustituimos estas expresiones para las amplitudes $\hat{A}(t)_P$ y $\hat{B}(t)_P$ en la forma asumida de la solución particular, obtenemos:

$$(A_n(t))_P = -\frac{\psi(\omega, \Omega_n, h)}{\omega^2 - \Omega_n^2} \cos(\omega t). \quad (3.67)$$

Como resultado, obtenemos para $A_n(t)$ la siguiente expresión:

$$A_n(t) = \hat{A}_n \cos(\Omega_n t) + \hat{B}_n \sin(\Omega_n t) - \frac{\psi(\omega, \Lambda, h)}{(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t) \quad (3.68)$$

Para la amplitud C_m obtenemos la misma expresión que antes para $A_n(t)$, pero con el índice m en lugar de n . Ahora, la función potencial se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\left(\hat{A}_n \cos(\Omega_n t) + \hat{B}_n \sin(\Omega_n t) - \frac{\psi(\omega, \Lambda_n, h)}{(\omega^2 - \Omega_n^2)} \cos(\omega t) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{A}{b^2} \omega \cos(\omega t) \frac{F_n}{\Lambda_n} G_n(y) \right) \cosh(\Lambda_n(y+h)) + \frac{A}{b^2} \omega \cos(\omega t) \frac{F_n}{\Lambda_n} H_n(y) \sinh(\Lambda_n(y+h)) \right] \cos(k_{zn} z) \right\} \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\left(\hat{C}_m \cos(\Omega_m t) + \hat{D}_m \sin(\Omega_m t) - \frac{\psi(\omega, \Lambda_m, h)}{(\omega^2 - \Omega_m^2)} \cos(\omega t) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{A}{b^2} \omega \cos(\omega t) \frac{F_m}{\Lambda_m} G_m(y) \right) \cosh(\Lambda_m(y+h)) + \frac{A}{b^2} \omega \cos(\omega t) \frac{F_m}{\Lambda_m} H_m(y) \sinh(\Lambda_m(y+h)) \right] \sin(k_{zm} z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

que es una función de las constantes desconocidas $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_m$ y \hat{D}_m . Para obtener estas constantes utilizamos las condiciones iniciales para $\hat{\phi}(k, y, z, t)$ dada por las ecuaciones (3.42) y (3.43). Obtenemos:

$$\hat{A}_n = \frac{\psi(\omega, \Lambda_n, h)}{\omega^2 - \Omega_n^2} + \frac{A \omega F_n}{b^2 \Lambda_n} G_n(0) - \frac{A \omega F_n}{b^2 \Lambda_n} H_n(0) \tanh(\Lambda_n h), \quad (3.70)$$

$$\hat{B}_n = 0, \quad (3.71)$$

$$\hat{C}_m = \frac{\psi(\omega, \Lambda_m, h)}{\omega^2 - \Omega_m^2} + \frac{A \omega F_m}{b^2 \Lambda_m} G_m(0) - \frac{A \omega F_m}{b^2 \Lambda_m} H_m(0) \tanh(\Lambda_m h), \quad (3.72)$$

$$\hat{D}_m = 0. \quad (3.73)$$

La forma definitiva de la función potencial $\hat{\phi}(k, y, z, t)$ viene dada por la ecuación:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{AF_m}{b^2} \left[-\frac{\omega^3}{\lambda_m^2(\omega^2 - \Omega_m^2)} \frac{\cos(\Omega_m t) - \cos(\omega t)}{\cosh(\Lambda_m h)} + \omega \frac{\cosh(\Lambda_m h)}{\Lambda_m^2} (\cos(\Omega_m t) - \cos(\omega t)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\omega \sinh^2(\Lambda_m h)}{\Lambda_m^2 \cosh(\Lambda_m h)} \cos(\Omega_m t) \right] \cosh(\Lambda_m(y+h)) + \frac{A}{b^2} \omega F_m \frac{\sinh^2(\Lambda_m(y+h))}{\Lambda_m^2} \cos(\omega t) \right\} \cos(k_{2m} z) \\
& + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{AF_m}{b^2} \left[-\frac{\omega^3}{\lambda_m^2(\omega^2 - \Omega_m^2)} \frac{\cos(\Omega_m t) - \cos(\omega t)}{\cosh(\Lambda_m h)} + \omega \frac{\cosh(\Lambda_m h)}{\Lambda_m^2} (\cos(\Omega_m t) - \cos(\omega t)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\omega \sinh^2(\Lambda_m h)}{\Lambda_m^2 \cosh(\Lambda_m h)} \cos(\Omega_m t) \right] \cosh(\Lambda_m(y+h)) + \frac{A}{b^2} \omega F_m \frac{\sinh^2(\Lambda_m(y+h))}{\Lambda_m^2} \cos(\omega t) \right\} \sin(k_{2m} z).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Estamos interesados en el desplazamiento de la superficie $\eta(k, z, t)$, el cual viene dado en términos de la función potencial $\phi(k, y, z, t)$ según la ecuación (3.31). Entonces la transformada del coseno del desplazamiento de superficie libre se da en términos de la transformada de Fourier del potencial según la ecuación:

$$\hat{\eta}(k, z, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}(x, 0, z, t). \tag{3.75}$$

Si aplicamos esta ecuación a la expresión para $\hat{\phi}(k, y, z, t)$ dada por la ecuación (3.74), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(k, z, t) = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{AF_m}{gb^2} \frac{\omega \Omega_m}{\Lambda_m^2(\omega^2 - \Omega_m^2)} (\omega \sin(\omega t) - \Omega_m \sin(\Omega_m t)) \right] \cos(k_{2m} z) \right\} \\
& + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{AF_m}{gb^2} \frac{\omega \Omega_m}{\Lambda_m^2(\omega^2 - \Omega_m^2)} (\omega \sin(\omega t) - \Omega_m \sin(\Omega_m t)) \right] \cos(k_{2m} z) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

3.2 Solución de la integral de Fourier

Aquí aplicamos la transformada de coseno inversa a la expresión anterior para la transformada de coseno del desplazamiento de superficie libre. La transformada de coseno inversa viene dada por la ecuación (3.36), y la aplicamos a la ecuación (3.76) para obtener el desplazamiento de superficie libre,

$$\begin{aligned} \eta(x, z, t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{AF_n}{gb^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega\Omega_n}{\Lambda_n^2(\omega^2 - \Omega_n^2)} (\omega \sin(\omega t) - \Omega_n \sin(\Omega_n t)) \cos(kx) dk \right] \cos(k_{zn}z) \right\} \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{AF_m}{gb^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega\Omega_m}{\Lambda_m^2(\omega^2 - \Omega_m^2)} (\omega \sin(\omega t) - \Omega_m \sin(\Omega_m t)) \cos(kx) dk \right] \sin(k_{zm}z) \right\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Los integrandos en las integrales anteriores parecen tener polos en el plano complejo k para soluciones de números de onda de $\omega^2 - \Omega_n^2(k) = 0$. A medida que $\Omega_n(k)$ se aproxima a $\pm\omega$, tenemos que $\Omega_n(k) \sin(\omega t)$ se aproxima a $\omega \sin(\omega t)$ de la misma forma, por lo que no hay singularidad en el integrando y la integral se comporta bien. Para obtener el desplazamiento de superficie libre hemos evaluado numéricamente las transformadas de coseno inversas que aparecen en la ecuación (3.77). Los resultados de estas simulaciones se utilizaron para generar animaciones de la evolución del desplazamiento de superficie libre debido a la acción del creador de ondas sobre el fluido. Estas animaciones se tratan en la sección siguiente.

3.3 Resultados numéricos.

Aquí mostramos los resultados de la evaluación numérica de las transformadas de coseno inversas que aparecen en la ecuación (3.77) para el desplazamiento de superficie libre. Mostramos la evolución del desplazamiento de superficie libre en el tiempo a través de la evaluación numérica de la ecuación (3.77). Hemos generado animaciones para la evolución del desplazamiento de superficie libre debido a la acción del creador de ondas en $x = 0$. Aquí vemos los ejemplos y presentamos vínculos para acceder a películas relacionadas con estos ejemplos.

- Consideramos que el desplazamiento del creador de ondas coincide con el primer modo de onda cosenoidal en la dirección z . La frecuencia de excitación está por encima de la *frecuencia de corte* para el primer modo de onda cosenoidal. Con este tipo de excitación, en único modo de onda que toma parte en la solución es el primer modo de onda cosenoidal. Como el creador de ondas parte de una situación de descanso hasta llegar al movimiento armónico, excita en principio todas las

frecuencias de onda y genera una perturbación transitoria que se propaga por el canal y va seguida de un tren de ondas monocromático (el modo de onda del coseno) con una frecuencia igual a la frecuencia de excitación. La perturbación transitoria tiene un frente de onda que se propaga con la máxima velocidad de grupo posible para este modo de onda del coseno. Para la profundidad $h = 0,1$ metros, la figura 5 ilustra la velocidad de grupo máxima para los modos de onda cosenoidales. La máxima velocidad de grupo posible $C_{g,max}$ es la del modo de onda cosenoidal con $k_{zn} = \frac{\pi}{2b}$ ($n = 0$). Entonces, para un instante dado t , no hay perturbaciones de onda en las posiciones $x > C_{g,max}t$. La perturbación transitoria para un instante dado t permanece en la región $C_{g,max}t > x > C_g(\omega)t$, donde $C_g(\omega)$ es la velocidad de grupo del modo de onda cosenoidal excitado en la frecuencia de excitación ω . Para ver la [animación](#) asociada con este ejemplo, haga clic [aquí](#).

- Consideramos que el desplazamiento del creador de ondas coincide con el segundo modo de onda cosenoidal en la dirección z . La frecuencia de excitación está por encima de la *frecuencia de corte* para el primer modo cosenoidal pero por debajo para el segundo modo. De nuevo, el creador de ondas parte de una situación de descanso hasta llegar al movimiento armónico. Todas las frecuencias de onda resulta inicialmente excitadas y se crea una perturbación transitoria. Ésta se propaga por el canal, y tras él sólo nos queda el segundo modo de onda cosenoidal, que decae exponencialmente a medida que nos alejamos del creador de ondas, ya que a esta frecuencia de excitación el segundo modo de onda cosenoidal es evanescente. De nuevo, perturbación transitoria tiene un frente de onda que se propaga con la máxima velocidad de grupo posible para el segundo modo de onda cosenoidal. Para ver la [animación](#) asociada con este ejemplo, haga clic [aquí](#).

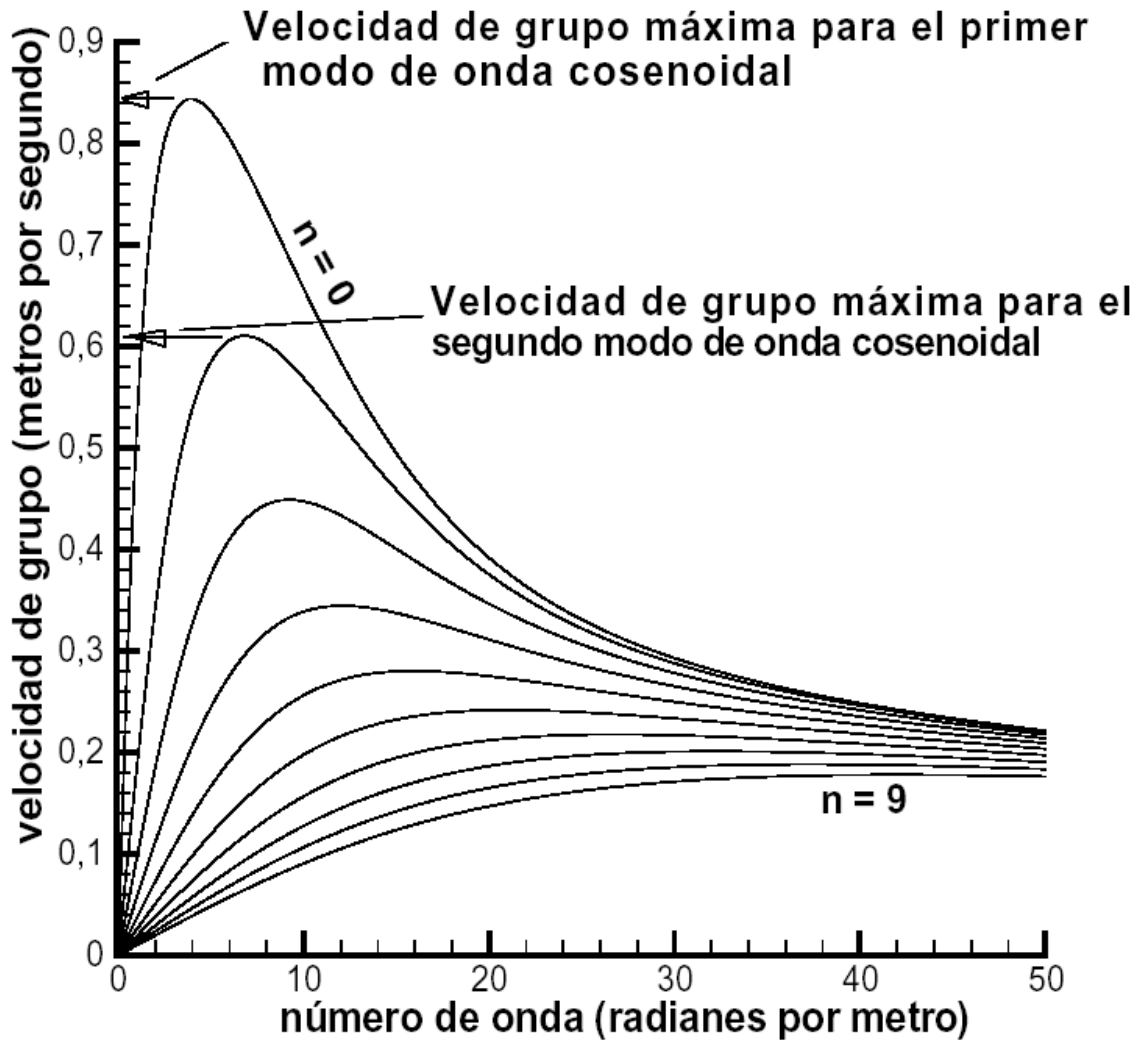


Figura 5: velocidad de grupo en función del número de onda k para varios valores del autovalor k_{zn} , y una profundidad del agua de $h = 0,1$ metros. La velocidad de grupo máxima para el primer modo de onda cosenoidal ($C_{g,max}$) se indica en la figura. La velocidad de grupo máxima para el segundo modo cosenoidal también se indica en la figura.

- Consideramos que el desplazamiento del creador de ondas coincide con el primer modo cosenoidal en la dirección z . La frecuencia de excitación está justo en la *frecuencia de corte*. De nuevo, el creador de ondas parte de una situación de descanso hasta llegar al movimiento armónico, y al inicio todas las frecuencias de onda resultan excitadas. Se crea una perturbación transitoria y se propaga por el canal. La perturbación tiene un

frente de onda que se propaga con la máxima velocidad de grupo posible $C_{g,max}$ para el primer modo de onda cosenoidal. Tras la perturbación transitoria sólo nos queda el primer modo de onda cosenoidal, ya que es el único modo de onda excitado por el creador de ondas. La velocidad de grupo de este modo de onda en su *frecuencia de corte* es cero, por lo que no existe propagación de energía por el canal una vez que la parte de la perturbación transitoria de la solución ya está lejos del creador de ondas. Como la energía no se puede radiar lejos del creador de ondas, vemos como crece la amplitud de onda con el tiempo cuando se acerca al creador de ondas. El modo de onda del coseno resuena con el creador de ondas en este caso. Para ver la [animación](#) asociada con este ejemplo, haga clic [aquí](#).

- Ahora el creador de ondas es una función lineal en la dirección z ($F(z) = z$). Mostramos la evolución de la perturbación debida a la acción del creador de ondas. Consideramos que todos los modos participan en la solución. En realidad sólo tenemos en cuenta un número finito de modos de onda cosenoidales y sinusoidales. A medida que aumenta el número de onda k_{zm} o k_{zn} asociado con un modo de onda, su amplitud disminuye, por lo tanto sólo un número finito de modos de onda es significativo. De nuevo, el creador de ondas parte de una situación de descanso hasta llegar al movimiento armónico. Tenemos inicialmente una perturbación transitoria que se propaga por el canal. Tiene un frente de onda que se propaga con la máxima velocidad de grupo posible, que es la velocidad de grupo máxima para el primer modo de onda sinusoidal. Por delante del frente de onda ($x > C_{g,max}t$ para un instante dado t , donde $C_{g,max}$ es la velocidad de grupo máxima para el primer modo de onda sinusoidal) no tenemos perturbación de ondas. Para un instante dado t , la perturbación transitoria permanece en la región $C_{g,max}t > x > C_g(\omega)t$, donde $C_g(\omega)$ es la velocidad de grupo del primer modo de onda sinusoidal en la frecuencia de excitación ω . Tras esta región tenemos la solución de estado estacionario. Para ver la [animación](#) asociada con este ejemplo, haga clic [aquí](#).