1.138J/2.062J, PROPAGACIÓN DE ONDAS
Otoño 2000 MIT
Examen final, 1-7 de diciembre de 2000

Debera observar estrictamente las siguientes reglas:

- *Puede utilizar el material entregado en clase, sus propias notas y el trabajo realizado en casa. No utilice otras referencias, impresas o manuscritas.*
- *Si tiene alguna duda sobre las preguntas o el examen, diríjase únicamente a mí. No consulte a otras personas ni siquiera a efectos de clarificación del examen. En el caso de que las preguntas sean de interés general, yo informaré al resto de los estudiantes por correo electrónico.*

----

1. En relación con la figura, un fluido ligero de densidad ρ' descansa sobre un fluido mas pesado de densidad ρ. Supongamos que la posición media de la interfaz sea $z = 0$ y el fluido transportador sea infinitamente pesado. Ignore la viscosidad y la compresibilidad de modo que tanto el aire como el agua puedan describirse mediantes potenciales de velocidad los cuales satisfacen la ecuación de Laplace. Tenga en cuenta ahora una onda sinusoidal en el espacio sobre la interfaz de modo que el desplazamiento vertical es

$$\zeta = \Re A e^{i(kx-\omega t)} \tag{1}$$

(i) Ignore la tensión de superficie, resuelva los potenciales en el agua y en el aire ϕ y ϕ', y halle la relación de dispersión entre *w* y *k*. *(ii).* Si en el momento $t = 0$ la interfaz se desplaza a

$$\zeta(x,0) = \frac{Sb}{\pi(x^2+b^2)} \tag{2}$$

¿Cómo varía en espacio y tiempo para x/t fijo y *t* mayor? Utilice su fórmula aproximada para describir instantáneas en tiempos diferentes y mayores.

2. Una distribución de presión se mueve de izquierda a derecha a velocidad constante sobre la superficie terrestre plana $y = 0$. El terreno es un semiespacio elástico infinito $y < 0$. En el sistema coordinado donde la carga es estacionaria, las ecuaciones de ondas para los potenciales elásticos ϕ y H se pueden resolver formalmente en términos de características

$$x + \beta_i y, \quad \text{and} \quad x - \beta_i y, \quad i = 1,2 \tag{3}$$

Aplique las condiciones de frontera para resolver TODOS los componentes de tensión en el semiespacio elástico y esboze sus respuestas para una carga rectangular:

$$P(x) = \begin{cases} P_o, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L \end{cases} \tag{1}$$

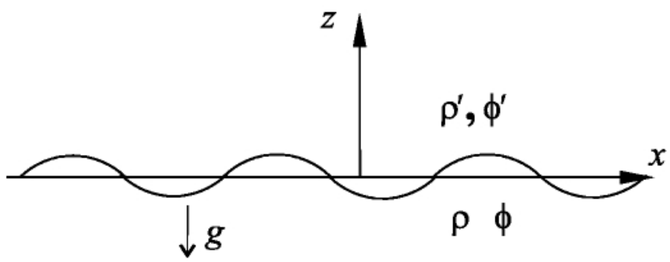

Figura 1:

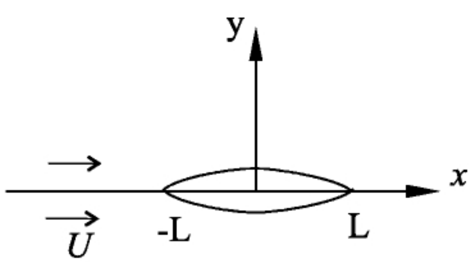

Figura 2:

(Si su solución es distinta de la que aparece en el material entregado en clase, cerciórese sólo de la suya). 3. En relación con la figura, un perfil aerodinámico delgado de sección cruzada simétrica se mueve a la velocidad constante U por su eje (eje x) en un aire comprimible. Se pueden generar ondas de sonido. Para un perfil aerodinámico suficientemente fino basta con ecuaciones lineales, de modo que en las coordenadas móviles fijas en el perfil, el potencial de velocidad de estado estacionario satisfaga

$$U^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

Supongamos que la sección cruzada venga dada por:

$$y = \pm h(x), \quad \text{para} - L < x < L \ \ \text{donde } h/L \ll 1 \tag{6}$$

(i). Ignore la viscosidad y derive primero la condición límite aproximada que representa la falta de flujo sobre la superficie aerodinámica. (ii). Resuelva la onda estacionaria generada cuando $U > c$ (supersónica). (iii) Para un perfil parabólico $h(x) = h_o(1 - x^2/L^2)$, halle la resistencia a la formación de ondas en la dirección x integrando de algún modo la presión sobre el perfil.

4. Guía de ondas atmosférica u oceánica. Debido a variaciones de temperartura (o de salinidad en los océanos), la densidad del fluido y la velocidad del sonido pueden ser no uniformes en profundidad. Bajo ciertas

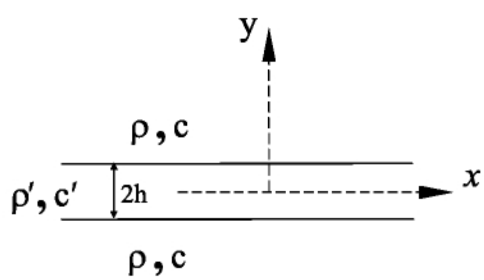

Figura 3:

condiciones las ondas sólo se puede propagar en una parte, o cerca, de la profundidad marina, de ahí que queden atrapadas dentro de una capa que sirve entonces de guiaondas. Las ondas guiadas pueden viajar una distancia horizontal larga antes de perder energía al disiparse.

En relación con la figura , estudie un océano modelo con tres capas. La profundidad de la capa intermedia es *2h*. En las capas inferior y superior las densidades son ρ, c y en la capa intermedia ρ', c'. Estudie modos de ondas que se propaguen en la dirección x con frecuencia w y número de onda α, pero con una atenuación exponencial equivalente a $y \to \pm\infty$. Específicamente (i) halle la condición en virtud de la cual son posibles los guiaondas atrapados, por ejemplo, ¿debería ser $c > c'$ o $c < c'$?. (ii) ¿Cuántos modos son posibles para una ω dada, c, c', ρ, ρ' y h?. *(iii)* ¿Cuál es la relación de dispersión entre ω y α para cada modo? (iv) ¿Cuál es la variación vertical de la presión o la velocidad de cada modo?

5. En relación con la figura . Una onda sinusoidal P es incidente de forma oblícua hacia una grieta semiinfinita a lo largo del eje x positivo. Halle mediante la aproximación parabólica ondas cerca de los rayos de frontera de las ondas reflejadas P y SV.

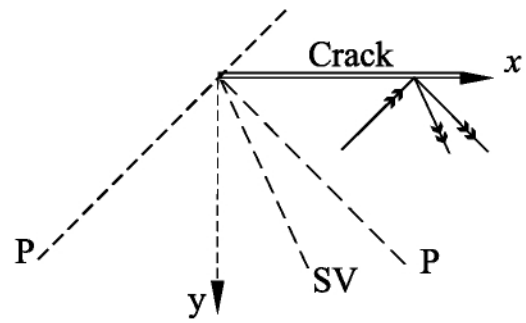

Figura 4: