

I-Proyecto de campus**Programa universitario sobre mecánica de fluidos****Módulos sobre ondas en fluidos**

T. R. Akylas y C. C. Mei

CAPÍTULO SIETE**ONDAS INTERNAS EN UN FLUIDO ESTRATIFICADO****1 Introducción**

La atmósfera y el océano están estratificados continuamente debido a cambios en la temperatura, la composición y la presión. Estos cambios en el océano y en la atmósfera pueden dar lugar a variaciones importantes de la densidad del fluido en la dirección vertical. Como ejemplo, el agua dulce de los ríos puede reposar encima del agua del mar, y debido a la pequeña difusividad, el contraste en la densidad permanece durante bastante tiempo. La estratificación de la densidad permite que se produzca la oscilación del fluido. La fuerza de restauración que produce la oscilación es la fuerza de flotación. Los fenómenos de ondas asociados con estas oscilaciones se llaman ondas internas y los trataremos en el presente capítulo.

2 Ecuaciones de gobierno para un fluido incompresible estratificado según su densidad.

Vamos a derivar el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento de las ondas de un fluido incompresible con estratificación de densidad continua. Se utilizarán las coordenadas cartesianas x, y y z , con z medido verticalmente hacia arriba. Los componentes de velocidad en las direcciones de x, y y z en aumento se indicarán como u, v y w . La partícula del fluido tiene que satisfacer la ecuación de continuidad,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

y las ecuaciones de momentum,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho, \quad (2.4)$$

donde ρ y p son, respectivamente, la densidad de fluido y la presión. El fluido se entiende de modo tal que la densidad depende sólo de la entropía y de la composición, esto es, ρ depende sólo de la temperatura potencial θ y de las concentraciones de constituyentes, por ejemplo, la salinidad s o la humedad q . Entonces, para un θ y q fijo (o s), ρ es independiente de la presión:

$$\rho = \rho(\theta, q). \quad (2.5)$$

El movimiento que tiene lugar se supone isoentrópico y sin cambio de fase, de modo que θ y q sean constantes para un elemento material. Por lo tanto:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{Dq}{Dt} = 0. \quad (2.6)$$

En otras palabras, ρ es constante para un elemento material porque lo son θ y q , y ρ depende sólo de θ y q . Un fluido tal se dice que es *incompresible*, y debido a (2.6) la ecuación de continuidad (2.1) se convierte en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.7)$$

Para un fluido incompresible, la densidad ρ satisface la ecuación de densidad:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.8)$$

Si suponemos que las velocidades son pequeñas, podemos linealizar las ecuaciones de cantidad de movimiento para obtener:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho, \quad (2.11)$$

A continuación, consideramos que el movimiento de ondas resulta de la perturbación de un estado de equilibrio, que es el estado del resto. Por tanto, la distribución de densidad y presión es la distribución de equilibrio hidrostático dada por:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}. \quad (2.12)$$

Cuando el movimiento se desarrolla, la presión y la densidad cambian a:

$$p = \bar{p}(z) + p', \quad (2.13)$$

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho', \quad (2.14)$$

donde p' y ρ' son, respectivamente, las perturbaciones de presión y densidad del estado de "segundo plano" en el que la densidad $\bar{\rho}$ y la presión \bar{p} están en equilibrio hidrostático.

La ecuación de densidad asume ahora la forma:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0. \quad (2.15)$$

Los términos no lineales $u(\partial \rho' / \partial x)$, $v(\partial \rho' / \partial y)$ y $w(\partial \rho' / \partial z)$ son insignificantes para un movimiento de amplitud pequeña, por lo que la ecuación (2.15) se simplifica a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

lo que indica que la perturbación de la densidad en un punto se genera mediante advección vertical de la distribución de densidad en segundo plano. La ecuación de continuidad (2.7) para un fluido incompresible permanece igual, pero las ecuaciones de cantidad de movimiento (2.9) a (2.11) asumen la forma:

$$\bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2.17)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (2.18)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - g p'. \quad (2.19)$$

Nos gustaría reducir los sistemas de las ecuaciones (2.7), (2.16) y (2.17) a (2.19) a una única ecuación diferencial parcial, lo que se puede lograr de la siguiente forma. En primer lugar, tomamos la derivativa temporal de la ecuación de continuidad para obtener:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = 0. \quad (2.20)$$

En segundo lugar, tomamos las derivadas x , y y t , respectivamente, de las ecuaciones (2.17) a (2.19), y obtenemos:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \quad (2.21)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}, \quad (2.22)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} - g \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (2.21) y (2.22) en la ecuación (2.20), obtenemos:

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = 0. \quad (2.24)$$

Podemos eliminar p' de (2.23) utilizando la ecuación (2.16) para obtener:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} + g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} w. \quad (2.25)$$

En tercer lugar, aplicamos el operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a la ecuación (2.25) para obtener:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.26)$$

A continuación, utilizamos la ecuación (2.24) para eliminar p' de la ecuación (2.26), lo que da la siguiente ecuación diferencial parcial para w :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.27)$$

donde definimos,

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}, \quad (2.28)$$

que posee las unidades de frecuencia (rad/sec) y se denomina la frecuencia Brunt-Väisälä o frecuencia de flotabilidad. Si asumimos que w varía con z mucho más rápido que $\bar{\rho}(z)$, entonces:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) w \sim \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (2.29)$$

y (2.27) puede aproximarse mediante la ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.30)$$

La suposición anterior es equivalente a la aproximación de Boussinesq, lo que se aplica cuando el movimiento tiene una escala vertical pequeña comparada con la escala de la densidad en segundo plano. Consiste en considerar la densidad como constante en el cálculo de las tasas de cambio de la cantidad de movimiento a partir de las aceleraciones, pero teniendo en cuenta en su totalidad las variaciones de densidad cuando dan lugar a fuerzas de flotabilidad, esto es, cuando existe un factor multiplicador g en el componente vertical de las ecuaciones de cantidad de movimiento. La aproximación de Boussinesq se traduce en la ecuación (2.30) para la velocidad vertical w .

3 La frecuencia de flotabilidad (frecuencia Brunt-Väisälä).

Tenga en cuenta un fluido estratificado en calma con una distribución de densidad estática $\bar{\rho}(z)$ que disminuye con altura z . Si un dominio fluido se mueve desde el nivel z hacia arriba hasta $z + \zeta$, está rodeado por un fluido más ligero de densidad $\bar{\rho}(z + \zeta)$. El empuje hacia arriba por unidad de volumen es:

$$g[\bar{\rho}(z + \zeta) - \bar{\rho}(z)] \approx g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \zeta, \quad (3.31)$$

y es negativo. Aplicando la ley de Newton al dominio fluido de volumen unitario, tenemos:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \zeta \quad (3.32)$$

o,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + N^2 \zeta = 0, \quad (3.33)$$

donde,

$$N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad (3.34)$$

lo que se denomina la frecuencia de flotabilidad o la frecuencia Brunt Väisälä. Esta consideración elemental muestra que una vez un fluido se desplaza de su posición de equilibrio, la gravedad y el gradiente de densidad proporcionan la fuerza restauradora para permitir oscilaciones.

4 Ondas de gravedad interna en fluidos estratificados no acotados

Considere el caso en el que la frecuencia de flotabilidad (Brunt-Väisälä) N es constante en todo el fluido. Las soluciones de onda progresiva de (2.30) se puede hallar de la forma:

$$w = w_0 \cos(kx + ly + mz - \omega t), \quad (4.35)$$

donde w_0 es la amplitud de velocidad vertical y $\vec{k} = (k, l, m)$ es el número de onda de la perturbación, y ω es la frecuencia. Para que (4.35) satisfaga la ecuación de gobierno (2.30) para la velocidad de perturbación vertical, ω y \vec{k} han de estar relacionadas mediante la relación de dispersión,

$$\omega^2 = \frac{(k^2 + l^2)N^2}{k^2 + l^2 + m^2}. \quad (4.36)$$

Así, las ondas internas pueden presentar cualquier frecuencia entre cero y un valor máximo de N . La relación de dispersión para ondas internas tiene un carácter bastante diferente comparado con el de las ondas de superficie. En particular, la frecuencia de las ondas de superficie depende sólo de la magnitud $|\vec{k}|$ del número de onda, mientras que la frecuencia de las ondas internas es independiente de la magnitud del número de onda y depende sólo del ángulo ϕ que el vector del número de onda haga con la horizontal. Para ilustrarlo, tenemos en cuenta el sistema esférico de coordenadas en el espacio de número de onda, a saber,

$$k = |\vec{k}| \cos(\phi) \cos(\theta) \quad (4.37)$$

$$l = |\vec{k}| \cos(\phi) \sin(\theta) \quad (4.38)$$

$$m = |\vec{k}| \sin(\phi) \quad (4.39)$$

El sistema de coordenadas en el espacio del número de onda se da en la figura 1.

La relación de dispersión dada por la ecuación (4.36) se reduce a:

$$\omega^2 = N \cos(\phi). \quad (4.40)$$

Ahora podemos escribir expresiones para las cantidades p' , ρ' , u y v . A partir de la ecuación (2.20) podemos escribir:

$$-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = \omega m u_0 \cos(kx + ly + mz - \omega t),$$

lo que implica que la presión de perturbación p' está dada por:

$$p' = -\frac{\omega m u_0 \rho_0}{(k^2 + l^2)^{1/2}} \cos(kx + ly + mz - \omega t). \quad (4.41)$$

A partir de la ecuación (2.16) tenemos la densidad de perturbación ρ' dada por:

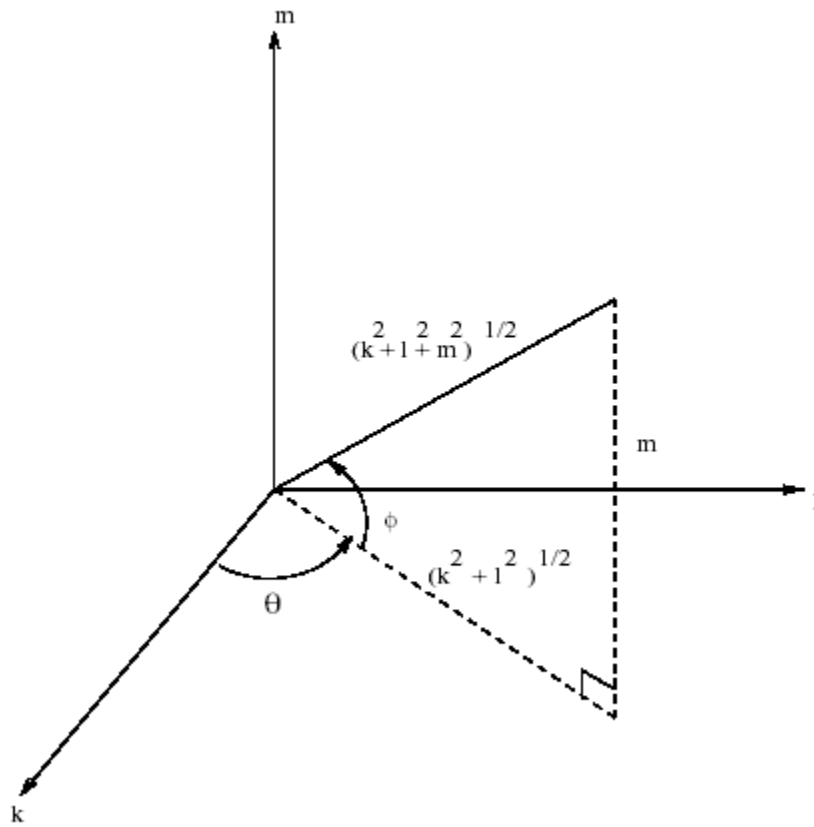


Figura 1: sistema de coordenadas en el espacio del número de onda.

$$p' = - \left(\frac{N^2}{\omega g} \right) \rho_0 w_0 \sin(kx + ly + mz - \omega t). \quad (4.42)$$

Los componentes de la velocidad horizontal se pueden hallar a partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18), lo que da:

$$(u, v) = -(k, l)(k^2 + l^2)^{-1} m \omega_0 \cos(kx + ly + mz - \omega t) \quad (4.43)$$

$$= (k, l)(\omega \rho_0)^{-1} p'. \quad (4.44)$$

Las relaciones anteriores entre las fluctuaciones de velocidad y presión pueden resultar útiles para deducir las propiedades de las ondas a partir de observaciones en un punto fijo. Por ejemplo, si los componentes de velocidad horizontal y la presión de perturbación de una onda progresiva se miden, el componente horizontal del vector del número de onda se puede deducir a partir de (4.44).

En la figura 2 se presenta un boceto que muestra las propiedades de una onda interna progresiva plana en el plano vertical que contiene el vector de número de onda. El movimiento de partículas tiene lugar a lo largo de las crestas de la onda, y no hay gradiente de presión en esta dirección. La fuerza restauradora sobre una partícula se debe por lo tanto únicamente al componente $g \cos \phi$ de gravedad en la dirección del movimiento. La fuerza restauradora es también proporcional al componente de cambio de densidad en esta dirección, que es $\cos \phi \frac{d\rho}{dz}$ por unidad de desplazamiento.

Tenga en cuenta ahora la sucesión de soluciones a medida que ϕ aumenta progresivamente de cero a $\pi/2$. Cuando $\phi = 0$, una línea vertical de partículas se mueve conjuntamente como una vara rígida experimentando vibraciones longitudinales. Cuando la línea de partículas se desplaza de su equilibrio, las fuerzas hidráulicas de restauración entran en juego del mismo modo que si la línea de partículas estuviese en un muelle, lo que provoca oscilaciones de frecuencia N . La solución para valores en aumento de ϕ corresponde a líneas de partículas moviéndose juntas en el ángulo ϕ a la vertical. La fuerza restauradora por unidad de desplazamiento ($\cos \phi d\rho'/dz$) es menor que en el caso en que ϕ

= 0, por lo que la frecuencia de la vibración es menor. A medida que ϕ tiende a $\pi/2$, la frecuencia de vibración tiende a cero. El caso $\phi = \pi/2$ no es una onda interna, pero representa una forma importante de movimiento que se observa a menudo. Por ejemplo, es bastante frecuente cuando se viaja en avión ver capas gruesas de nubes que son característicamente planas y extensas. Cada capa de nube se mueve en su propio plano horizontal, pero hay capas diferentes que se mueven de modo relativo entre ellas.

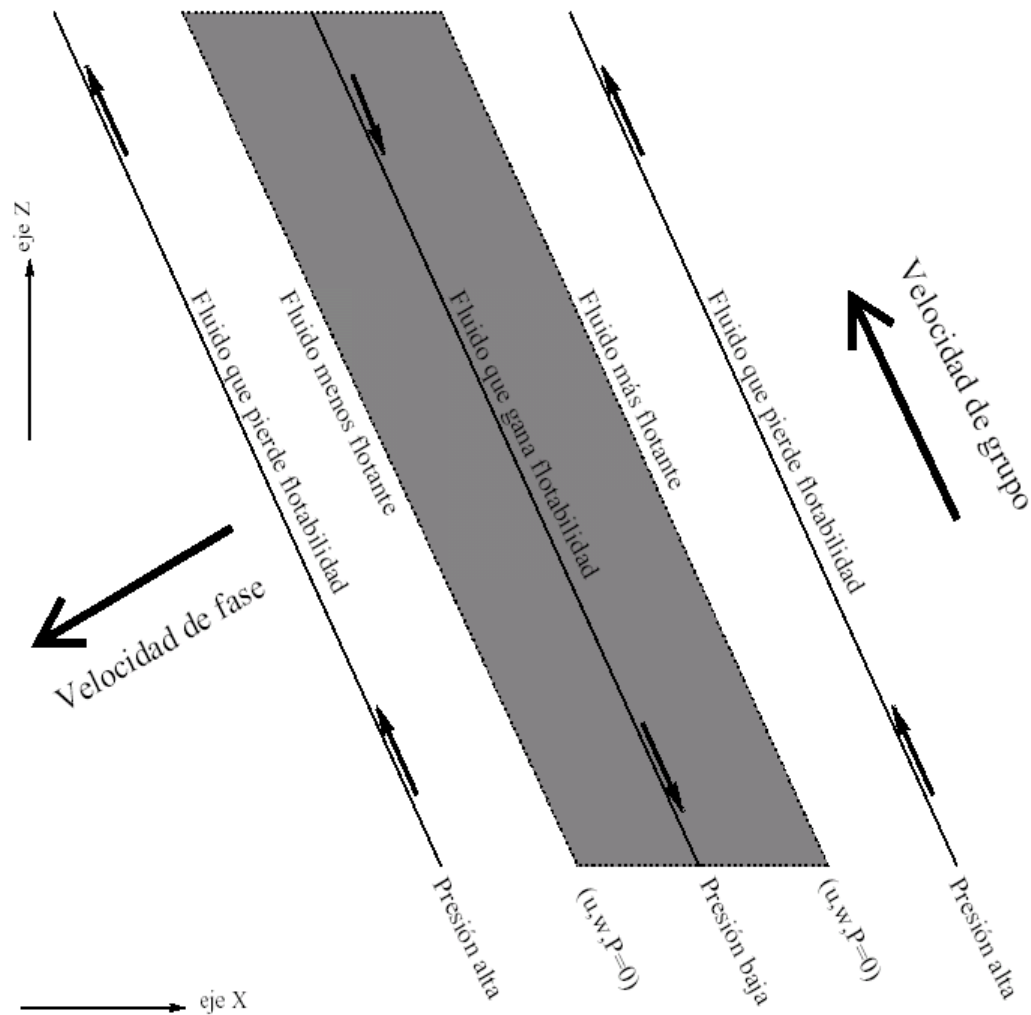


Figura 2: distribuciones instantáneas de perturbaciones de velocidad, presión y flotabilidad en una onda de gravedad interna. Se trata de una vista en el plano x, z . La fase de la onda es constante por las líneas inclinadas continua y de puntos. Las perturbaciones de velocidad y presión tienen valores extremos a lo largo de las líneas continuas; las perturbaciones de

flotabilidad equivalen a cero por las líneas continuas. Las perturbaciones de flotabilidad tienen valores extremos y las perturbaciones de presión y velocidad son cero a lo largo de las líneas de puntos. Las flechas pequeñas indican las velocidades de perturbación, que siempre son paralelas a las líneas de fase constante. Las flechas más gruesas indican la dirección de la propagación de fase y de la velocidad de grupo.

4.1 Efectos de dispersión.

En la práctica, las ondas de gravedad internas nunca presentan la forma de la misma onda plana dada por la ecuación (4.35), por lo que es necesario tener en cuenta la superposición de tales ondas. Como consecuencia, los efectos de la dispersión resultan evidentes, ya que las ondas con frecuencias distintas tienen diferentes velocidades de fase y de grupo como vamos a demostrar en esta sección. Para las ondas internas, las superficies de frecuencia constante en el espacio del número de onda son los conos $\phi = \text{constante}$. La velocidad de fase es paralela al vector de número de onda y reside en un cono de fase constante. Su magnitud es:

$$\frac{\omega}{|\vec{k}|} = \left(\frac{N}{|\vec{k}|} \right) \cos \phi. \quad (4.45)$$

La *velocidad de grupo* C_g es el gradiente de la frecuencia ω en el espacio del número de onda y, por lo tanto, es normal a la superficie de frecuencia constante ω . Se desprende que la velocidad de grupo está en los ángulos correspondientes al vector de número de onda. Cuando la velocidad de grupo tiene un componente ascendente, la velocidad de fase tiene un componente descendente, y viceversa. El vector de velocidad de grupo es:

$$C_g = \frac{N}{|\vec{k}|} \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, -\cos \phi). \quad (4.46)$$

Por lo tanto, la magnitud de la velocidad de grupo es $(N/|\vec{k}|)\sin \phi$ y su dirección está en un ángulo ϕ a la vertical, como ilustra la figura 3.

Para ilustrar los efectos de la dispersión, consideramos el caso de dos movimientos dimensionales. Sólo tenemos en cuenta las coordenadas x y z . En este caso, el número de

onda es el vector (k, m) . Consideramos un paquete de ondas localizado inicialmente. Debido a los efectos de la dispersión, el paquete de ondas se extiende y se mueve según el vector de velocidad de grupo C_g , que ahora se simplifica a:

$$C_g = \frac{N}{|\vec{k}|} \sin \phi (\sin \phi, -\cos \phi). \quad (4.47)$$

La velocidad de fase es perpendicular al vector de velocidad de grupo, por lo que las crestas de onda (líneas de fase constante) se mueven perpendicularmente hacia la dirección de propagación del paquete de ondas.

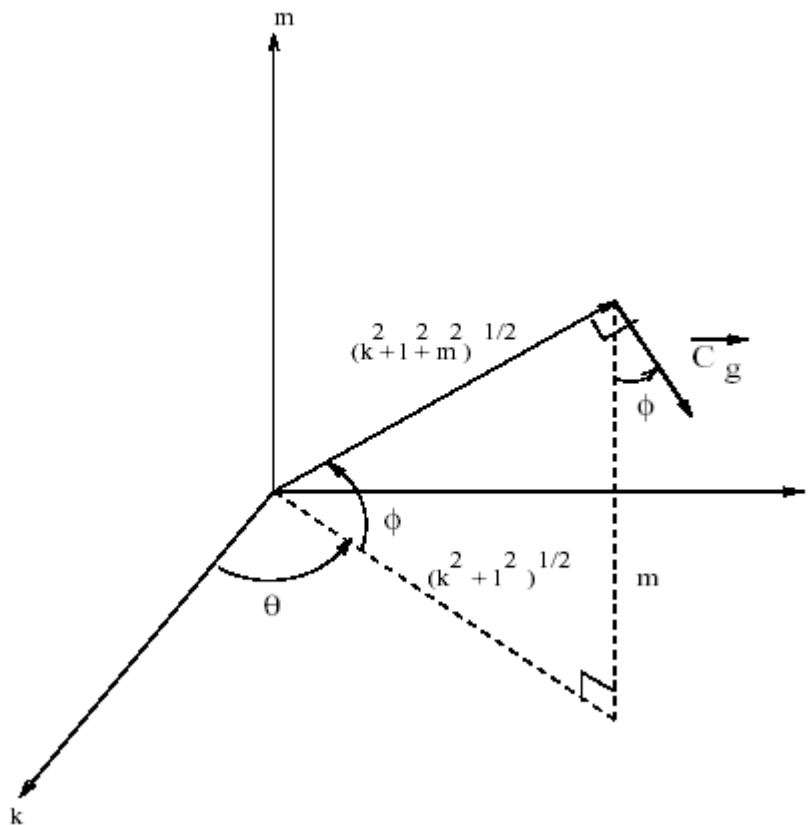


Figura 3: vector de número de onda y vector de velocidad de grupo.

La velocidad de fase viene dada por la ecuación (4.45), donde el vector de número de onda \vec{k} conforma un ángulo ϕ con la dirección horizontal (véase figura 1, pero ahora definido

$\theta = 0$).

Para ilustrar los efectos de la dispersión, estudiamos tres animaciones diferentes de un paquete de ondas localizado para la perturbación de densidad ρ' . La perturbación de densidad ρ' está relacionada con la velocidad vertical w mediante la ecuación:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} w, \quad (4.48)$$

y la ecuación de gobierno para la velocidad vertical w viene dada por la ecuación (2.30). Para obtener la evolución en el tiempo de un paquete de ondas localizado inicialmente para la densidad de perturbación, aplicamos una transformada de Fourier bidimensional a las ecuaciones (2.30) y (4.48). El par de la transformada de Fourier bidimensional que se tiene en cuenta es:

$$\hat{u}(k, m) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \{ \exp(-ikx - imz) u(x, z) \} \quad (4.49)$$

y,

$$u(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dm \{ \exp(-ikx - imz) \hat{u}(k, m) \}. \quad (4.50)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (2.30) viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} \hat{w} = 0, \quad (4.51)$$

que tiene solución de la forma:

$$\hat{w}(k, m, t) = A(k, m) \exp(i\omega t) + B(k, m) \exp(-i\omega t), \quad (4.52)$$

donde ω viene dado por la relación de dispersión:

$$\omega = \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (4.53)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (4.48) viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial \hat{\rho}'}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} \hat{w}. \quad (4.54)$$

A partir de las ecuaciones (4.51) y (4.54) tenemos que:

$$\hat{\rho}'(k, m, t) = \frac{\rho_0 N^2}{g \omega'(k, m)} \{-iA(k, m) \exp(i\omega t) + iB(k, m) \exp(-i\omega t)\}, \quad (4.55)$$

donde las constantes A y B se determinan a partir de la transformada de Fourier de las condiciones iniciales para ρ' , dadas por las ecuaciones:

$$\rho'(x, z, 0) = f(x, z), \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad (4.57)$$

lo que implica que las constantes $A(k, m)$ y $B(k, m)$ vienen dadas por las ecuaciones:

$$A(k, m) = \frac{ig\omega}{2\rho_0 N^2} \hat{f}, \quad (4.58)$$

$$B(k, m) = -\frac{ig\omega}{2\rho_0 N^2} \hat{f}. \quad (4.59)$$

La densidad de perturbación $\rho'(x, z, t)$ viene dada finalmente por la ecuación:

$$\rho'(x, z, t) = \frac{1}{8\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dm \left\{ \hat{f}(k, m) \exp(i\omega(k, m)t) + \hat{f}(k, m) \exp(-i\omega(k, m)t) \right\} \exp(-ikx - imz). \quad (4.60)$$

La función $f(x, z)$ y su transformada de Fourier $\hat{f}(k, m)$ vienen dadas por las ecuaciones:

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\sigma^2 - \frac{1}{2}z^2\tau^2\right) \cos(\bar{k}x + \bar{m}z), \quad (4.61)$$

$$\hat{f}(k, m) = \frac{1}{2\sigma\tau} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(k-\bar{k})^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(m-\bar{m})^2}{\tau^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(k+\bar{k})^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(m+\bar{m})^2}{\tau^2}\right) \right\}. \quad (4.62)$$

En la animación que sigue, mostramos los resultados de la evaluación numérica de la transformada de Fourier inversa en la ecuación (4.60) para una secuencia de valores de la variable t con \hat{f} dada por la ecuación (4.62).

La primera [animación](#) tiene como condición inicial un paquete de ondas gaussiano con $\sigma = 1/4$, $\tau = 1/4$ y $\bar{k} = \bar{m} = \frac{\pi}{2}$. Este paquete de ondas inicial tiene una forma circular y se divide en dos partes a medida que el tiempo aumenta. Estas dos partes se propagan en direcciones opuestas. Como los componentes x y z del número de onda principal son iguales y positivos y el paquete de ondas tiene la misma modulación por las direcciones x y z ($\sigma = \tau$), las dos partes del paquete de ondas inicial se desplazan hacia el centro del segundo y cuarto cuadrantes, como vemos en la [animación](#). Para el paquete de ondas en el segundo (cuarto) cuadrante el vector de velocidad de grupo señala lejos del origen hacia el centro del segundo (cuarto) cuadrante, de modo que la velocidad de fase, que es ortogonal a la velocidad de grupo, está orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj, como podemos observar por el movimiento de las crestas en la [animación](#). Si las dos partes separadas del paquete de ondas inicial están aún cerradas, vemos algunas interferencias constructivas y destructivas. Para ver esta [animación](#), haga clic [aquí](#).

La segunda [animación](#) tiene como condición inicial un paquete de ondas gaussiano con $\sigma = 1/2$, $\tau = 1/100$ y $\bar{k} = \bar{m} = \frac{\pi}{2}$. Este paquete de ondas inicial tiene forma de una elipse apaisada en la dirección x . En la [animación](#), este paquete de ondas inicial mira sin apenas variación en dirección x . El paquete de ondas se divide en dos partes a medida que el tiempo aumenta. Estas dos partes se propagan en direcciones opuestas, de modo similar al ejemplo anterior. El efecto interferencia entre las dos partes en las primeras etapas es más intenso que el observado en el ejemplo anterior, como podemos ver en la [animación](#). Para verla, haga clic [aquí](#).

La tercera [animación](#) tiene como condición inicial un paquete de ondas gaussiano con $\sigma = 1/2$, $\tau = 1/20$ y $\bar{k} = \bar{m} = \frac{\pi}{2}$. Este paquete de ondas inicial tiene forma de una elipse apaisada en la dirección x . La película muestra el paquete de ondas en su totalidad, que se divide en dos partes a medida que el tiempo aumenta. Ambas partes se propagan en direcciones opuestas, pero el vector de velocidad de grupo tiene un componente algo más pequeño en la dirección x , lo que se debe a la diferencia de modulación del paquete de ondas en las direcciones x y z , como podemos ver en la [animación](#). Para verla, haga clic [aquí](#).

4.2 Cruz de San Andrés.

Esta sección versa sobre el dibujo de las ondas para el caso de ondas internas producidas por una fuente localizada sobre una oscilación sinusoidal, como un cilindro oscilante por ejemplo, en un fluido con gradiente de densidad constante (la frecuencia de flotabilidad es constante). Para ondas internas sinusoidales, el flujo energético de onda $\vec{I} = \rho' \vec{u}$ (la presión de perturbación p' viene dada por la ecuación (4.41) y los componentes del vector de velocidad vienen dados por las ecuaciones (4.44) y (4.35)) promediado en un periodo viene dado por la ecuación:

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \frac{u_0^2 N m_0}{k^2 + l^2} \{ \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, -\cos \phi \}, \quad (4.63)$$

que es paralela a la velocidad de grupo, según la ecuación (4.46). Por lo tanto, para ondas internas la energía se propaga en la dirección de la velocidad de grupo, que es paralela a las superficies de fase constante. Este hecho significa que las ondas internas generadas por una fuente localizada nunca podían tener la apariencia familiar de las crestas circulares concéntricas centradas sobre la superficie, como vemos, por ejemplo, para las ondas de superficie de gravedad. En vez de eso, las crestas y otras superficies de fase constante se extiende de forma radial hacia fuera desde la superficie porque la energía de onda se desplaza con la velocidad de grupo, que es paralela a las superficies de fase constante.

Para una fuente de frecuencia definida $\omega \leq N$ (menos que la frecuencia de flotabilidad), esas superficies están todas en un ángulo definido

$$\phi = \cos^{-1}(\omega/N), \quad (4.64)$$

a la *vertical*; por tanto, toda la energía de onda generada en la región fuente se desplaza hacia ese ángulo a la *vertical*. De igual modo, está confinado a un cono doble con semi-ángulo ϕ . La dirección del vector de la velocidad de grupo por el cono doble se especifica por el hecho de que la energía tiene que radiar hacia fuera desde la superficie. La dirección de propagación de las líneas de fase constante también se especifica en términos de la dirección de la velocidad de grupo y por el hecho de que la velocidad de fase,

$$\vec{C} = \frac{N \cos \phi}{|k|} \{ \cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi \} \quad (4.65)$$

sea ortogonal a la velocidad de grupo, y que:

$$\vec{c} + \vec{c}_g = \frac{N}{|k|} \{\cos \theta, \sin \theta, 0\}. \quad (4.66)$$

Entonces, dada la dirección de la velocidad de grupo, la ortogonalidad de la fase y la velocidad de grupo más la condición (4.66), queda especificada la dirección de la velocidad de fase. Si la velocidad de grupo tiene un componente vertical positivo, la velocidad de fase tiene un componente vertical negativo y viceversa. El caso bidimensional de un cilindro oscilante se ilustra en la figura 4.

Esta propiedad única de la anisotropía se ha verificado en los interesantes experimentos realizados por Mowbray y Stevenson. Si oscilamos un cilindro largo en varias frecuencias verticalmente en un fluido estratificado, sólo se hallan líneas de fase similares a lo largo de cuatro vigas que forman la "Cruz de San Andrés", véase la figura 5 para $\omega/N = 0,7$ y $\omega/N = 0,9$. Se puede verificar que los ángulos son $\phi = 45$ grados para $\omega/N = 0,7$, y $\phi = 26$ grados para $\omega/N = 0,9$, de acuerdo con la condición (4.64).

5 Comportamiento del guiaondas

En esta sección estudiamos una propagación de onda libre en un fluido estratificado continuamente en presencia de límites, como un océano o una atmósfera. Nos restringimos al caso en el que el fondo es plano, pero no se realizará ni la aproximación hidrostática ni la aproximación de onda larga. El estado de equilibrio que se está perturbando es el que está en reposo, por tanto la densidad, y también la frecuencia de flotabilidad, sólo está en función de la coordenada vertical z . Comenzamos con un océano, que tiene un límite superior. La atmósfera es en cierto modo diferente ya que no presenta un límite superior, por lo tanto, más adelante en esta sección, se realiza un estudio de ondas esta situación.

5.1 El guiaondas en el océano.

Como asumimos el estado no perturbado como estado de reposo, las propiedades del fluido son constantes en superficies horizontales y, además, los límites son horizontales. Las soluciones a la ecuación de perturbación (2.27) se pueden hallar en la forma:

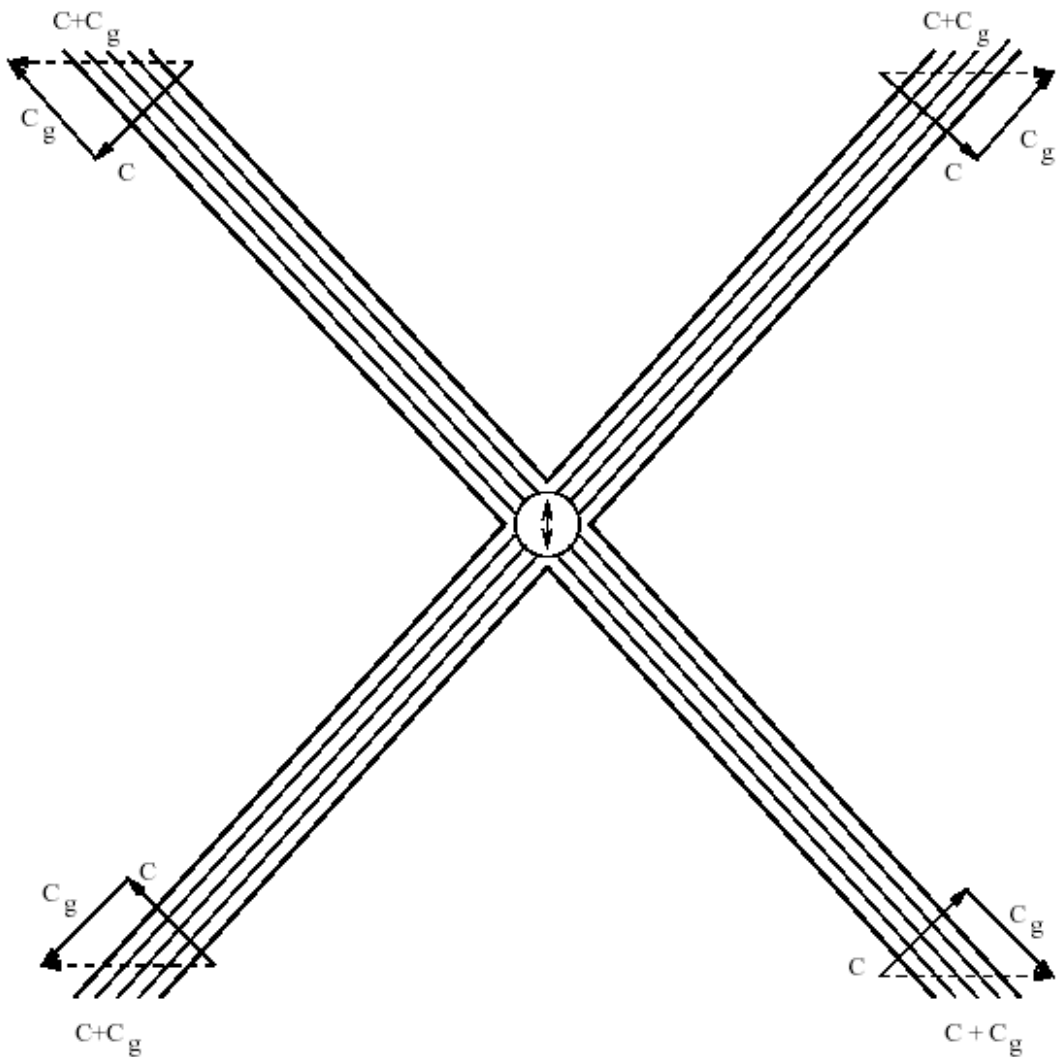


Figura 4: velocidades de grupo y de fase.

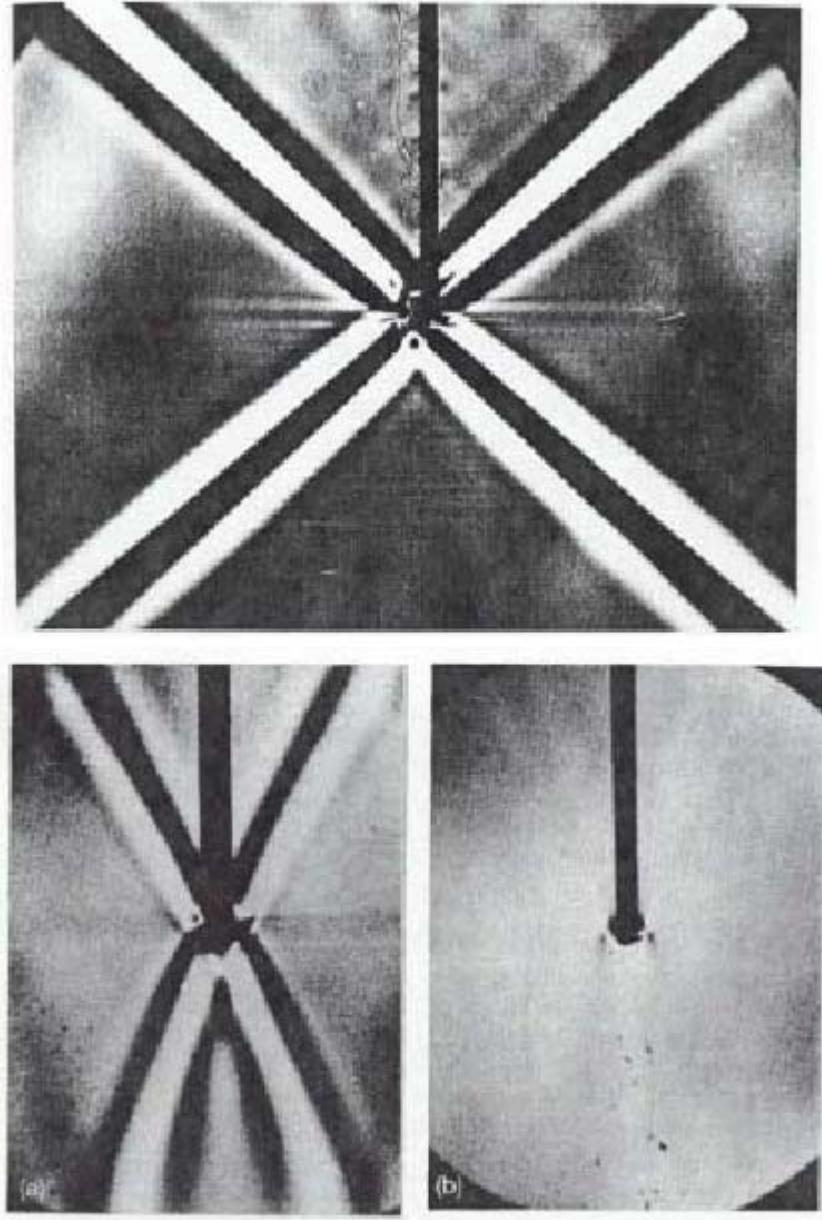


Figura 5: cruz de San Andrés en un fluido estratificado. En la figura superior $\omega/N = 0,9$ y en la figura inferior izquierda $\omega/N = 0,7$.

$$w(x, y, z, t) = \hat{w}(z) \exp[i(kx + ly - \omega t)] \quad (5.67)$$

La ecuación para $\hat{w}(z)$ se puede hallar mediante sustitución de la ecuación (5.67) en la ecuación de gobierno (2.27). Obtenemos:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right] + \frac{(N^2 - \omega^2)}{\omega^2} (k^2 + l^2) \hat{w}(z) = 0 \quad (5.68)$$

Las condiciones de frontera para esta ecuación son la condición de fondo sin flujo, dada por la ecuación:

$$\hat{w}(z) = 0 \text{ at } z = -H, \quad (5.69)$$

y en la superficie libre tenemos la condición linealizada,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \bar{\rho} g w(z) \text{ at } z = 0, \quad (5.70)$$

donde p' es la presión de perturbación. A partir de esta ecuación podemos obtener una condición de frontera de superficie libre para $\hat{w}(z)$. Aplicamos el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ a la ecuación (2.24), y entonces reemplazamos la ecuación (5.70) en la ecuación resultante. Como resultado, obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} = g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{ at } z = 0 \quad (5.71)$$

Ahora, si sustituimos la ecuación (5.67) en la ecuación (5.71), la condición de frontera de superficie libre para $\hat{w}(z)$, de lo que se desprende:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \frac{(N^2 - \omega^2)}{\omega^2} (k^2 + l^2) \hat{w}(z) = 0 \text{ at } z = 0, \quad (5.72)$$

Para simplificar la ecuación de gobierno para $\hat{w}(z)$, realizamos la aproximación de Boussinesq, de modo que la ecuación (5.68) se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \frac{(N^2 - \omega^2)}{\omega^2} (k^2 + l^2) \hat{w}(z) = 0, \quad (5.73)$$

con las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (5.72) y (5.69). Las dos fronteras (el fondo y la superficie libre) tienen el efecto de confinar la energía de onda a una región de extensión finita, por lo que el océano se puede considerar como un *guiaondas* que hace que la energía se propague horizontalmente.

Imagínese ondas internas que se propagan oblicuamente por el océano, los reflejos en los límites superior e inferior garantizan que no se pierde energía del *guiaondas*, mientras que la propagación horizontal no presenta inhibiciones.

A continuación, obtenemos la solución general de la ecuación (5.73) de acuerdo con las condiciones de frontera (5.72) y (5.69). En primer lugar, tenemos en cuenta el caso en el que $\omega^2 > N^2$. Para este caso, la solución general tiene la forma:

$$\hat{w}(z) = \frac{\cosh[m(z + H)]}{\cosh(mH)} \text{ with } m^2 = \frac{(\omega^2 - N^2)}{\omega^2} (k^2 + l^2), \quad (5.74)$$

que ya satisface la condición de frontera de fondo. La condición de frontera de superficie libre (5.72) da la relación de dispersión:

$$m \tanh(mH) = \frac{g}{\omega^2} (k^2 + l^2), \quad (5.75)$$

que es similar a la relación de dispersión para las ondas de superficie. En realidad, la solución (5.74) no es una onda interna, sino una onda de gravedad de superficie. Para tener ondas internas, necesitamos que $\omega^2 \leq N^2$. Este es el próximo caso a tener en cuenta. Consideramos la solución general de la ecuación (5.73), que viene dada por la ecuación:

$$\hat{w}(z) = \sin[m(z + H)] \text{ with } m^2 = \frac{(\omega^2 - N^2)}{\omega^2} (k^2 + l^2), \quad (5.76)$$

que ya satisface la condición de frontera de fondo. Si reemplazamos la ecuación (5.76) por la condición de frontera de superficie libre (5.72), obtenemos la relación de dispersión:

$$N^2 - \omega^2 = gm \tanh(mH). \quad (5.77)$$

Para un valor dado de la frecuencia ω , esta relación de dispersión da un conjunto contable de valores para los módulos del componente horizontal ($k^2 + l^2$) del número de onda, o para un valor dado del módulo del componente horizontal del número de onda, tenemos un conjunto contable de valores posibles para la frecuencia ω . Para una ω más pequeña o del mismo orden que la frecuencia de flotabilidad N , se puede realizar la aproximación “*rigid lid*” (tapa rígida), esto es, el lado izquierdo de la ecuación (5.72) es pequeño comparado con el lado derecho, así la ecuación (5.72) se reduce a:

$$\hat{w}(z) = 0 \text{ at } z = 0. \quad (5.78)$$

Esta condición de frontera da una relación de dispersión de la forma:

$$\sin(mH) = 0 \quad (5.79)$$

o,

$$\omega^2 = \frac{(k^2 + l^2)N^2 H^2}{n^2 \pi^2 + (k^2 + l^2)H^2}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.80)$$

que es más cercana al resultado dado por la relación de dispersión dada por la condición de frontera de superficie libre (5.77). El valor de m para el caso con una superficie libre es ligeramente mayor que el caso con la aproximación de la tapa rígida.

Si el océano se perturba con una estructura espacial de uno de los modos (un valor específico de m para una ω dada), entonces, el comportamiento subsiguiente en el tiempo lo describe la ecuación (5.67), esto es, existe una oscilación con una frecuencia particular. Tal situación, sin embargo, es improbable, por lo que es necesario representar la estructura inicial en el espacio como una *superposición* de modos (para una ω dada, tenemos un conjunto contable de valores para $k^2 + l^2$). Entonces, cada uno de estos se comportará en el tiempo como se halló anteriormente, y así, la solución se puede construir en todos los instantes tomando la superposición apropiada de modos.

5.2 Ondas libres en una región semi-infinita.

La atmósfera no tiene un límite superior definido como el océano, así que las soluciones de la ecuación (5.73) se tendrá en cuenta ahora para el caso de un dominio semi-infinito $z > 0$. En este caso hay dos tipos de soluciones, la primera se tipifica en el caso $N = \text{constante}$. Las únicas soluciones de la ecuación (5.73) que satisfacen la condición en el suelo $z = 0$ y permanecen limitadas en infinito son sinusoidales, esto es,

$$\hat{\psi}(z) = \sin(mz), \quad (5.81)$$

donde m tiene la misma expresión que la dada en la ecuación (5.76). No existen ahora restricciones sobre m , por lo que según la relación funcional entre m y ω dada en la ecuación (5.76), la frecuencia ω puede tener cualquier valor entre $0 \leq \omega < N$, esto es, hay un espectro continuo de soluciones. La superposición de dichas soluciones se puede utilizar para resolver problemas de valor inicial, y tener la forma de las integrales de Fourier.

Cuando N varía con z , existe otro tipo de solución posible, a saber, una que satisface la condición en el suelo y, si embargo, se descompone a medida que $z \rightarrow \infty$. Estos son modos de guiondas, y existe, en general, sólo un número finito posible. Un ejemplo sencillo es el del caso en el que una región de profundidad H de frecuencia de flotabilidad grande uniforme N_1 subyace a una región semi-infinita de frecuencia de flotabilidad pequeña uniforme N_2 . La capa con la frecuencia de flotabilidad N_1 tiene profundidad H y se encuentra en $0 < z < H$ y la capa semi-infinita con frecuencia de flotabilidad N_2 se encuentra en $z > H$. Para $0 < \omega < N_2$, la solución en ambas capas tiene la forma dada por la ecuación (5.81) con $m = m_1$ en la primera capa $m = m_2$ en la segunda. La frecuencia de onda es constante por la interfaz de las dos capas, lo que da la relación,

$$\frac{N_1^2}{m_1^2 + k^2 + l^2} = \frac{N_2^2}{m_2^2 + k^2 + l^2} \quad (5.82)$$

entre los números de onda verticales m_1 y m_2 . Para este caso, el espectro es continuo y ω puede asumir cualquier valor entre 0 y N_2 . Lo que no es cierto para el caso en que $N_2 < \omega < N_1$, cuando la frecuencia ω puede asumir sólo un conjunto finito de valores en el abanico de $N_2 < \omega < N_1$. En este caso, la solución de la ecuación (5.73) para la primera capa viene dada por la ecuación:

$$\hat{w}(z) = \sin(m_1 z) \text{ where } m_1^2 = \frac{(N_1^2 - \omega^2)}{\omega^2}(k^2 + \ell^2), \quad (5.83)$$

y en la segunda capa tenemos la solución dada por la ecuación:

$$\hat{w}(z) = \exp(-\gamma z) \text{ where } \gamma^2 = \frac{(\omega^2 - N_2^2)}{\omega^2}(k^2 + \ell^2). \quad (5.84)$$

En la intersección $z = H$ entre las dos capas, la presión de perturbación p' y la velocidad vertical w debería ser continua. De otro modo, esta condición se puede expresar en términos del cociente:

$$Z = \frac{p'}{\rho_0 w}, \quad (5.85)$$

que debe ser el mismo en ambos lados de la frontera. Es conveniente referirse a Z como la "impedancia". La condición de que la impedancia en ambos lados de la interfaz de las capas ha de ser la misma da los valores posibles para ω (autovalores). Esta condición la expresa la ecuación:

$$\cot^2(m_1 H) = \frac{\omega^2 - N_2^2}{N_1^2 - \omega^2}. \quad (5.86)$$

El espectro en términos de la frecuencia de onda tiene una parte continua más una parte discreta, solución de la ecuación (5.86). Los modos \hat{w} para $0 < \omega < N_2$ son de forma sinusoidal en ambas capas, y para $N_2 < \omega < N_1$ los modos $\hat{w}(z)$ son sinusoidales en la primera capa y decaen exponencialmente en la segunda. Así, para deducir cómo cambiará la perturbación con el tiempo a partir de un estado inicial, es necesario representar éste como una superposición de modos de guíasondas discretos y el espectro continuo de modos sinusoidales. La amplitud relativa de los diferentes modos depende del estado inicial.