
Otoño 2002 13.00 Boletín de problemas 8 — Respuestas

1. (L.H.S = parte izquierda; R.H.S = parte derecha)

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} e^{-i(kr-\omega t)} \right) \\ &= \left(-\frac{A}{r^2} - \frac{iAk}{r} \right) e^{-i(kr-\omega t)} \\ r^2 \frac{\partial p}{\partial r} &= (-A - iAkr) e^{-i(kr-\omega t)} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= (-iAk + (-A - iAkr)(-ik)) e^{-i(kr-\omega t)} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= \left(-\frac{Ak^2}{r} \right) e^{-i(kr-\omega t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \left(-\frac{A\omega^2}{r} e^{-i(kr-\omega t)} \right) \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad $c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$, podemos demostrar que la parte derecha y la izquierda son iguales (QED).

3.(a)

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{\rho c} = \frac{(1 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2)^2}{(1000 \text{ kg/m}^3 \times 1500 \text{ m/s})} = 0,67 \times 10^{-18} \text{ Watio/m}^2$$

(b)

$$0,0002 \text{ dina/cm}^2 \times \frac{10^4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \times \frac{10^{-5} \text{ N}}{1 \text{ dina}} = 2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

(c)

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{\rho c} = \frac{(2 \times 10^{-5})^2}{(1,21 \times 343)} = 9,63 \times 10^{-13} \text{ Watio/m}^2$$

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_{ref}}$$

Para el susurro tenemos, $\mathcal{P} = 10^{-10}$ W y para el grito, $\mathcal{P} = 10^{-5}$ W. Si suponemos que tanto el susurro como el grito son omnidireccionales, podemos dividir por 4π para obtener las intensidades: $I_{susurro} = 7,9^{-12}$ e $I_{grito} = 7,9^{-7}$.

Utilizando la referencia del aire:

$$I_{susurro} = 10 \log \left(\frac{7,9^{-12}}{9,63 \times 10^{-13}} \right) = 9,1 \text{ dB re } 0,0002 \text{ dina/cm}^2$$

$$I_{grito} = 10 \log \left(\frac{7,9^{-7}}{9,63 \times 10^{-13}} \right) = 59,1 \text{ dB re } 0,0002 \text{ dina/cm}^2.$$

Utilizando la referencia submarina:

$$I_{susurro} = 10 \log \left(\frac{7,9^{-12}}{0,67 \times 10^{-18}} \right) = 70,7 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa}$$

$$I_{grito} = 10 \log \left(\frac{7,9^{-7}}{0,67 \times 10^{-18}} \right) = 120,7 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa}$$

(d) Si todos los habitantes del planeta gritasen al mismo tiempo (en el mismo lugar),

$$I = (6 \times 10^9) \times 7,9^{-7} \text{ W/m}^2 = 4,74 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Calcule el nivel de presión del sonido en dB:

$$NF = 10 \log \left(\frac{4,74 \times 10^3}{9,63 \times 10^{-13}} \right) = 157 \text{ dB re } 0,0002 \text{ dina/cm}^2$$

$$NF = 10 \log \left(\frac{4,74 \times 10^3}{0,67 \times 10^{-18}} \right) = 218 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa.}$$

(e) Para la banda de rock:

$$140 \text{ dB} = 10 \log \left(\frac{I}{9,63 \times 10^{-13}} \right)$$

$$I = (9,63 \times 10^{-13}) \times 10^{14} = 96,3 \text{ Vatios/m}^2.$$

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

¿Cuál es el nivel de presión del sonido (NPS) en el agua?

$$10 \log \left(\frac{96,3}{0,67 \times 10^{-18}} \right) = 202 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa.}$$

El sonido de la banda de rock sería más alto que el de la ballena.

4. (a) A partir de la definición, la intensidad de A, I_A cumple lo siguiente:

$$100 = 10 \log_{10} \frac{I_A}{I_{ref}}, \Rightarrow \frac{I_A}{I_{ref}} = 10^{10}$$

Las intensidades de B y C cumplen respectivamente lo siguiente:

$$100 = 10 \log_{10} \frac{I_B}{I_{ref}} \Rightarrow \frac{I_B}{I_{ref}} = 10^{10}$$

$$90 = 10 \log_{10} \frac{I_C}{I_{ref}} \Rightarrow \frac{I_C}{I_{ref}} = 10^9$$

Por lo tanto, $I_{A+B} = (I_A + I_B)$ nos proporciona:

$$10 \log_{10} \left(\frac{I_A + I_B}{I_{ref}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{I_A}{I_{ref}} + \frac{I_B}{I_{ref}} \right)$$

$$= 10 \log_{10}(2 \cdot 10^{10}) = 10(\log_{10} 2 + 10)$$

$$\cong 103,0 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa}$$

(b)

$$10 \log_{10} \left(\frac{I_A + I_C}{I_{ref}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{I_A}{I_{ref}} + \frac{I_C}{I_{ref}} \right)$$

$$= 10 \log_{10}(10^{10} + 10^9) \cong 100,4 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa}$$

(c)

$$10 \log_{10} \left(\frac{I_A + I_B + I_C}{I_{ref}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{I_A}{I_{ref}} + \frac{I_B}{I_{ref}} + \frac{I_C}{I_{ref}} \right)$$

$$= 10 \log_{10}(10^{10} + 10^{10} + 10^9) \cong 103,2 \text{ dB re } 1 \mu \text{ Pa}$$

5.

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

1. $f = 30 \text{ kHz}$; $\lambda = c / f = 1500 / 15000 = 0,05 \text{ m}$.

$$\tan \theta_{3dB} = (25 / 1000) \implies \theta_{3dB} = \pm 1,43^\circ$$

$$\theta_{3dB} = \pm \frac{29,5 \lambda}{D} = \pm 1,43$$

$$D = \frac{29,5 (0,05)}{1,43} = 1,03 \text{ metros.}$$

2. $ID = 10 \log \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 = 10 \log \left(\frac{1,03 \pi}{0,05} \right)^2 = 36 \text{ dB}$

3. $NF = 171 + 10 \log \mathcal{P} + ID = 171 + 10 \log (1) + 36 = 207 \text{ dB re } 1 \mu\text{Pa a } 1 \text{ metro.}$

4. A partir de Matlab, $\alpha \approx 7,6 \text{ dB / Km}$.

$$PT = 20 \log r + \alpha r \times 10^3 = 20 \log 1000 + 1(7,6) = 60 + 7,6 = 67,6 \text{ dB re } 1 \text{ metro.}$$

5. Utilice la fórmula de Urick (y las fotocopias 2) para calcular el nivel de eco:

$$EL = NF - 2 PT + TS = 207 - 2(67,6) = 72 \text{ dB re } 1 \mu\text{Pa a } 1 \text{ metro.}$$

6. Cuando el barco se mueve a ± 10 grados, el área insonorizada variará entre $\pm (10 + \theta_{3dB}) = \pm 11,5$ grados en la dirección que cruza. $1000 \tan(11,5) = 203$ metros. Por lo tanto, la región insonorizada del fondo tendrá hasta ± 203 metros de anchura.

Observe también que el ping de un sonido tarda $2 \times 1000\text{m} \div 1500\text{m/seg} \approx 1,3$ segundos en viajar desde el barco hasta el fondo y volver. Dependiendo de la velocidad de balanceo del barco, existe la posibilidad de que el haz apunte en una dirección diferente en el momento de la recepción y en el de la transmisión del pulso. Esto tendría como resultado una detección mucho más débil desde uno de los lóbulos laterales del patrón de haz, o la imposibilidad de detectar nada.

6. (c) Aumente $D\rho/Dt$ utilizando la definición de derivada principal,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho$$

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

e insértelo en la ecuación 1 para obtener

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0.$$

Los dos últimos términos son el resultado de aplicar la regla de la cadena a la divergencia de un vector que sea escalar x veces, es decir,

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot \vec{u})$$

y obtenemos el resultado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}).$$

(d) Podemos omitir el efecto de la gravedad en la derivación de la ecuación de onda, dado que suponemos un movimiento infinitesimal. Si aplicamos la definición de la derivada principal Du/Dt y aplicamos la ecuación 4, obtenemos:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u \right] = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + 0 + 0 \right\}$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)v \right] = \left\{ 0 - \frac{\partial p}{\partial y} + 0 \right\}$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)w \right] = \left\{ 0 + 0 - \frac{\partial p}{\partial z} \right\}$$

(f) Las perturbaciones para la presión y la densidad son: $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. Para los tres componentes de velocidad tenemos $u = u_0 + u'$, $v = v_0 + v'$, y $w = w_0 + w'$. Sin embargo nos dicen que $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. Por lo tanto, el vector de velocidad \vec{u} es simplemente:

$\vec{u} = u'\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$. Si aplicamos éstos a la ecuación de masa obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} = -\nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{u}')$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}' - \nabla \cdot (\rho' \vec{u}')$$

Dado que ρ_0 es constante, $\partial \rho_0 / \partial t = \text{cero}$. Además, $\nabla \cdot (\rho' \vec{u}')$ es un término de segundo orden y se puede suprimir, obteniendo:

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}'$$

Para las ecuaciones de momentum, considere en primer lugar la ecuación para x:

$$\rho \left[\frac{\partial u'}{\partial t} + (\vec{u}' \cdot \nabla) u' \right] = \frac{\partial (p_0 + p')}{\partial x}$$

$$\rho \left[\frac{\partial u'}{\partial t} + \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}$$

Los tres términos que comprenden la segunda parte del lado izquierdo de esta ecuación son cuadráticos y, por lo tanto, se pueden omitir. Dado que ρ_0 es constante, $\partial \rho_0 / \partial x$ es cero y nos queda:

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial x}$$

Aplicamos el mismo proceso a las ecuaciones de momentum x e y para obtener:

$$\rho \frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial y}$$

$$\rho \frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial z}$$

lo que puede combinarse en un única ecuación de vector:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = \nabla \cdot p'$$

(g) Diferencie la nueva ecuación de masa respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}' \right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{u}')$$

(1)

y tome la divergencia de las ecuaciones de momentum:

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} \right) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\ \rho (\nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t}) &= \nabla^2 p'\end{aligned}\tag{2}$$

Puesto que $\nabla \cdot (\partial \vec{u}' / \partial t) = \partial / \partial t (\nabla \cdot \vec{u}')$, la parte derecha de la ecuación 1 es igual a la parte izquierda de la ecuación 2, por lo que se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho' = \nabla^2 p'.$$

(i) Manipule la ecuación 3 para que se resuelva para p :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\rho_\phi}{1 - p/k} \\ \rho(1 - p/k) &= \rho_\phi \\ k\rho - \rho p &= k\rho_\phi \\ p &= k \left[1 - \frac{\rho_\phi}{\rho} \right].\end{aligned}$$

Sustituya $k = c^2 \rho$ en esta ecuación para obtener

$$p = c^2 \rho \left[1 - \frac{\rho_\phi}{\rho} \right] = c^2 \rho - c^2 \rho_\phi$$

y tome la derivada respecto a ρ

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$$

(j) A partir de la regla de cadena, podemos ampliar $\partial^2 \rho' / \partial t^2$:

13.00 boletín de problemas 8 — respuestas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial \rho'}{\partial p'} \right] \\ &= \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial p'} \right) + \frac{\partial \rho'}{\partial p'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial p'} \right) = 0,$$

por lo tanto, podemos suprimir el primer término y nos queda:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial \rho'}{\partial p'} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}.$$

Utilizando nuestro resultado de c^2 para $\partial p / \partial \rho$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}.$$

Por último, si sustituimos esto en la ecuación 8, obtenemos el resultado deseado:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'$$