13.00 Introducción a la ciencia y tecnología oceánica
Soluciones del boletín de problemas 1

1. $\phi = xy^2z^3 + \cos(y^2 + z^2)$

(a.) $\vec{\nabla}\phi = y^2z^3\hat{\mathbf{i}} + 2xyz^3 - 2y\sin(y^2 + z^2)\hat{\mathbf{j}} + 3xy^2z^2 - 2z\sin(y^2 + z^2)\hat{\mathbf{k}}$

(b.) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 2xy^3 + 6xy^2z - 4\sin(y^2 + z^2) - 4(y^2 + z^2)\cos(y^2 + z^2)$

(c.) $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi = y^4z^6 + (x2yz^3 - 2y\sin(y^2 + z^2))^2 + (3xy^2z^2 - 2z\sin(y^2 + z^2))^2$

(d.) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

2. Desde el 21/03 al 20/09, el aumento en el contenido de calor de la columna de agua entre la superficie y cierta profundidad es:

$$Q = \int_0^z c_p\rho[T_{9/20} - T_{3/21}]dz' = c_p\rho\int_0^z [T_{9/20} - T_{3/21}]dz'$$

Lea las temperaturas de los gráficos, que se presentan en intervalos de 10 metros, e integre la diferencia entre los valores del 20/09 y los del 21/03 empleando para ello la regla de Simpson:

Profundidad (m)	Multiplicador de Simpson	9/20	3/21	Δ T	SM$*\Delta T$
0	1	9,5	5,3	4,2	4,2
10	4	9,4	5,1	4,3	17,2
20	2	9,3	4,9	4,4	8,8
30	4	9,2	4,8	4,4	17,6
40	2	8,6	4,7	3,9	7,8
50	4	6,2	4,6	1,6	6,4
60	2	5,1	4,5	0,6	1,2
70	4	4,7	4,5	0,2	0,8
80	2	4,4	4,4	0,0	0,0
90	4	4,4	4,4	0,0	0,0
100	1	4,3	4,3	0,0	0,0
	Media:	6,83	4,68	Total:	64,0

Por tanto, Q viene determinado por:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta z}{3} c_p \rho \Sigma (\text{Multiplicador de Simpson}) * \Delta T) \\ &= \frac{10}{3}(4{,}185 \times 10^3)(10^3)(64{,}0) \end{aligned}$$

$$= 893 \times 10^6 \text{ J/m}^2 \qquad (1)$$

Observe que hemos tomado el límite superior de la integral como z = 100 m. No importa qué valor utilicemos, siempre y cuando éste sea igual o superior a 80 m, ya que la temperatura no varía por debajo de esta profundidad.

Se podría utilizar otro método para integrar la diferencia de temperatura como, por ejemplo, una sencilla regla trapezoidal, o incluso utilizar la diferencia de las medias de la tabla anterior. Sin embargo, resulta más conveniente utilizar la regla de Simpson, ya que es sencilla de usar y proporciona resultados mucho más precisos que, por ejemplo, las reglas trapezoidales.

3. La densidad se puede calcular utilizando matlab con la función `sw_dens` o utilizando las tablas de los apuntes. Los pasos en el cálculo de las densidades, en el caso de que se utilicen las tablas, son los siguientes:

	21/03	20/09
Media T en la columna	4,7	6,8
σ_t base (de la tabla)	23,75	23,51
f (de la tabla)	0,794	0,789
σ_t (calculado)	27,72	27,46
ρ Kg/m^3	1027,72	1027,46

El valor para σ_t se calcula utilizando las instrucciones para la tabla A-2,

$$\sigma_t = \sigma_t - base + f \times (S - 30.0)$$

La columna de agua se expandirá en proporción inversa al cambio de densidad. Además, la columna que tiene una altura de 100 m el 21/03, el 20/09 tendrá una altura de:

$$100 \times \left(\frac{1027{,}72}{1027{,}46} \right) = 100{,}025 \text{ metros}$$

La altura de la columna (y, por consiguiente, el nivel del océano aumentará en 2,5 cm.

4. La figura de más adelante muestra los ejes *x* e *y* superpuestos en la figura que se proporcionó anteriormente.

A partir del material de clase (pág. 140), encontramos que el radio medio de la Tierra es de 6,367×106 metros. A partir de los datos que se proporcionan sobre la temperatura, tenemos valores *T* en intervalos de 0,4º en las direcciones este / oeste y norte / sur. En la dirección norte / sur (*y*), un arco de 0,4º tiene una longitud de:

$$\Delta y = 2\pi \times 6{,}367 \times 10^6 \times \frac{0{,}4}{360} = 44.500 \text{ metros}$$

En la dirección este / oeste, la distancia alrededor del mundo se reduce por medio de cos ϕ, donde ϕ corresponde a la latitud. El valor medio de la latitud para nuestros datos es de 32,2º norte. Por lo tanto, tenemos:

$$\Delta x = 2\pi \times 6{,}367 \times 10^6 \times \frac{0{,}4}{360} \times \cos 32{,}2 = 37.600 \text{ metros}$$

En ambas direcciones, *x* e *y*, el cambio en T es de –2ºC por encima de estas distancias. Por consiguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-2^{\circ}\text{C}}{37.600 \text{ m}} = -5{,}32 \times 10^{-5}\,{}^{\circ}\text{C/metro}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{-2^{\circ}\text{C}}{44.500 \text{ m}} = -4{,}49 \times 10^{-5}\,{}^{\circ}\text{C/metro}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\partial T / \partial y}{\partial T / \partial x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-4,49\times 10^{-5}}{-5,32\times 10^{-5}}\right) = -140^{\circ}$$

El vector del gradiente debe ser perpendicular a las líneas de T constante. En la figura anterior, este es un vector que apunta hacia el lado inferior derecho. Si las escalas de longitud fuesen idénticas, el vector apuntaría hacia abajo formando un ángulo de 45°. Puesto que las dos escalas no son idénticas, la dirección cambia en unos 5°.