13.00 Introducción a la ciencia y tecnología oceánica
Boletín de problemas 8

1. Demuestre que $p(r,\ t) = \frac{A}{r} e^{-i(kr-\omega t)}$ es una solución a la ecuación de onda en coordenadas esféricas.

Ecuación de onda:

$$\vec{\nabla}^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

En coordenadas esféricas, el operador de Laplace, $\vec{\nabla}^2$, es:

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Con la simetría esférica (no hay variación en ϕ o θ), la fórmula anterior se puede simplificar de la forma siguiente:

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

2. Utilice Matlab para realizar los problemas **2.3.2**, **2.3.3** y **2.3.4** del libro de Medwin y Clay (página 67).

3. La intensidad de referencia I_{ref} en la acústica submarina se define como la intensidad de una onda plana con una presión p_{ref} de 1 micropascal (μPa). En la acústica del aire, es frecuente definir la intensidad con relación a una presión de referencia distinta de 0,0002 dina/cm^2, que corresponde al umbral de la audición humana. Las dos convenciones utilizan una distancia de referencia de 1 metro.

(a) Calcule el valor de $I_{ref\text{-}agua}$ en vatios/m^2 .

(b) Calcule el valor de $I_{ref\text{-}aire}$ en vatios/m^2 .

(c) Un susurro humano y un grito poseen potencias acústicas de unos 10^{-10} y 10^{-5} vatios, respectivamente. Exprese sus niveles de decibelios (dB) utilizando las dos convenciones.

(d) ¿Cuál sería el nivel de dB si todos los habitantes del planeta gritasen al mismo tiempo (en el mismo sitio)? Compare el resultado con el producido por un avión o un cohete en el aire o con varios tipos de barcos en el agua.

(e) Si una banda de rock tocase en el umbral del dolor de unos 140 dB re 0,0002 dina/cm^2, ¿cuál sería su potencia de salida en vatios? ¿Cuál sería su nivel de presión de sonido correspondiente en el agua?

(f) Las ballenas que producen una mayor frecuencia de sonido tienen niveles de fuente de unos 190 dB re 1 μPa. Compare este dato con los de una banda de rock.

Para el medio acuático, utilice ρ = 1000 kg/m^3 y c = 1500 m/s. Para el aire, utilice ρ =1.21 kg/m^3 y c = 343 m/s. Nota: 1 dina = 10,5 newtons.

Para realizar el apartado (c), puede suponer que un susurro y un grito son omnidireccionales.

4. Tenemos dos fuentes de sonido, A y B. Cada una de ellas tiene un nivel de presión de sonido de 100 dB re 1 μPa. La fuente de sonido C tiene un nivel de presión de sonido de 90 dB re 1 μPa.

(a) ¿Qué nivel de presión de sonido mediría si las fuentes de sonido A y B se encendiesen al mismo tiempo?

(b) ¿Qué nivel de presión de sonido mediría si las fuentes de sonido A y C se encendiesen al mismo tiempo?

(c) ¿Qué nivel de presión de sonido mediría si las tres fuentes de sonido se encendiesen al mismo tiempo?

5. Sonar buscador de tesoros.

Suponga que necesita encontrar un objeto en el fondo marino a 1 Km. de profundidad. Le dicen que utilice una frecuencia de explotación de 30 Khz. y un array circular uniforme montado sobre un barco de superficie. El objeto debe localizarse con un error de ± 25 m.

1. ¿Cuál debería ser el diámetro del array circular?

2. ¿Cuál es el índice de directividad (ID) de este array?

3. Suponga que el sonar irradia 1 vatio de potencia en un hemisferio por debajo del barco (un transductor con deflector ideal irradia potencia únicamente en un hemisferio). ¿Cuál es el nivel de fuente (NF) en el eje acústico del sonar?

4. Suponiendo que se diese una propagación esférica, ¿cuál sería la pérdida de transmisión (PT) en un alcance de 1 Km.?

5. ¿Cuál es el nivel de eco recibido si el sonar apunta directamente hacia un objeto con una fuerza de blanco TS = 0 dB?

6. Si el barco de reconocimiento empuja ± 10º al tiempo que avanza a lo largo de la trayectoria, ¿sería capaz de asegurar un error de ± 25 m para la ubicación del objetivo?

6. En este ejercicio tendrá que derivar (obtener) la ecuación de la onda acústica a partir de los primeros principios. Comenzaremos con la conservación de la masa y el momentum que aprendió en clase.

(a) Comience por la conservación de la masa,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

la conservación del momentum,

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho(\vec{i} \cdot \vec{g}) + \left\{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right\}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho(\vec{j} \cdot \vec{g}) + \left\{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right\},$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho(\vec{k} \cdot \vec{g}) + \left\{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right\} \tag{2}$$

y las relaciones constitutivas,

$$c^2 = \frac{k}{\rho}$$

$$\rho(s, T, p) = \frac{\rho_\phi(s, T, 0)}{1 - \frac{p}{k(s,T,p)}} \tag{3}$$

respecto a la velocidad del sonido.

(b) La relación constitutiva para el flujo comprimible y aviscoso es:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \tag{4}$$

(c) Manipule la ecuación de masa para obtener:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}). \tag{5}$$

(d) Manipule la ecuación de momentum y utilice la ecuación 4 para obtener:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u \right] = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) v \right] = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) w \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6}$$

¿Qué justificación hay para eliminar la gravedad del problema?

(e) Suponga que todas las variables poseen un término constante y un término de perturbación infinitesimal. Por ejemplo,

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{7}$$

donde ρ_0 es la constante y ρ la perturbación. Suponga que los términos de velocidad constante tienen todos un valor igual a cero.

(f) Sustituya la ecuación 7 y la similar en la ecuación 5 y en la 6. Mantenga únicamente términos que sean lineales en las perturbaciones. ¿Cuál es la justificación para suprimir términos que son cuadráticos en las perturbaciones?

(g) Diferencie su nueva ecuación de masa con respecto al tiempo y tome la divergencia de sus ecuaciones de momentum.

(h) Identifique la equivalencia en sus dos ecuaciones y combínelas para obtener:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' = \nabla^2 p'. \tag{8}$$

(i) Ya estamos cerca de la solución. El siguiente paso es eliminar ρ de la ecuación 8. Ordene la ecuación 3 de forma que obtenga:

$$p = k[1 - \frac{\rho_\phi}{\rho}] \tag{9}$$

Utilice de nuevo la ecuación 3, y el hecho de que $\rho_\phi/\rho \cong 1$, para encontrar una relación entre $\partial p/\partial \rho$ y la velocidad del sonido *c*.

(j) Por último, utilice la regla de la cadena en la ecuación 8 y su resultado para $\partial p/\partial \rho$ para obtener la ecuación de la onda acústica.

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p' \tag{10}$$

(k) ¡Felicidades! Acaba de demostrar que la ecuación de la onda acústica es un caso especial de las ecuaciones hidrodinámicas que se obtienen a partir del flujo de fluido.