Otoño 2002, 13.00 Boletín de problemas 6 — Respuestas (corregidas)

(a) El punto frontal de las olas se mueve con la velocidad de grupo, ya que el punto siempre forma un extremo del envolvente de la ola. Dado que $\frac{\omega^2 h}{g} = \frac{(2\pi \cdot 1{,}5)^2 \cdot 1{,}22}{9{,}81} \approx 11{,}5$ > 2, se puede emplear la aproximación de aguas profundas.

$$C_g = \frac{1\omega}{2k} = \frac{1g}{2\omega} = \frac{1}{2}\frac{9{,}81}{2\pi \cdot 1{,}5} \approx 0{,}52 \text{ (m/s)}$$

Por consiguiente, se tarda L/C_g = 30,48/0,52 ≈ 58,6 segundos en llegar al otro extremo del tanque. (b) Velocidad de flujo $F = TE \cdot C_g$.
Potencia = velocidad de flujo multiplicada por la anchura w del tanque.

$$P = TE \cdot C_g \cdot w = \frac{1}{2} pga^2 * \frac{1}{2}\frac{\omega}{k} \cdot w = 49 \cdot 0{,}52 \cdot 2{,}44 = 62{,}2 \text{ (Vátios)}$$

(c) Para cumplir la condición de aguas profundas, $h > \frac{\lambda}{2}$. Dado que $\omega^2 = gk$ en aguas profundas,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{g}{2\pi}\frac{1}{f^2} \approx \frac{1{,}56}{f^2}$$

Por consiguiente,

$$h > \frac{1{,}56}{2}\frac{1}{f^2} = \frac{0{,}78}{f^2}$$

En consecuencia, $f > \sqrt{\frac{0{,}78}{h}} = \sqrt{\frac{0{,}78}{1{,}22}} \approx 0{,}799.$

(d) A medida que la onda reflejada viaja hacia atrás por el tanque, las ondas que viajan hacia la derecha e izquierda interferirán unas con otras de forma constructiva y destructiva. (Probablemente, en la práctica esto tendría como resultado que el agua "saltase fuera" del tanque si el generador de olas estuviese en funcionamiento durante un tiempo prolongado. Si la longitud del tanque es un número entero de longitudes de onda y la reflexión es perfecta, entonces justo en el momento en que la primera onda reflejada alcanzase el generador, todo el tanque se llenaría de ondas estacionarias, tal y como se describe en la página 103 de los apuntes de Ogilvie).

13.00 boletín de problemas 6 — respuestas

3.

(a)

$$T = 4 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

La condición de aguas profundas se mantiene, dado que $\frac{\omega^2 h}{g} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 15}{9{,}81} \approx 3{,}7728 > 2$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega^2}{g} \approx 0{,}252 \quad (1/\mathrm{m}) \\ \lambda &= \frac{g}{2\pi} T^2 \approx 24{,}98 \quad (\mathrm{m}) \\ C_p &= \frac{g}{\omega} \approx 6{,}245 \quad (\mathrm{m/s}) \\ C_g &= \frac{1}{2} C_p \approx 3{,}123 \quad (\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

4. Suponga que para este problema *a* = 1,0 (error en el enunciado del problema).

(a)

$$f = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}} \approx 0{,}25$$

(b) $|\vec{u}|$ en $z = 0{,}0$.

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ &= \sqrt{(a\omega)^2 \cos^2(kx - \omega t + \theta) + 0 + (a\omega)^2 \sin^2(kx - \omega t + \theta)} \\ &= a \cdot \omega = 1 \cdot 1{,}57 = 1{,}57 \quad (\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

(c) $|\vec{u}|$ en $z = -10{,}0$.

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ &= \sqrt{(a\omega)^2 e^{-20k} \cos^2(kx - \omega t + \theta) + 0 + (a\omega)^2 e^{-20k} \sin^2(kx - \omega t + \theta)} \\ &= a \cdot \omega e^{-10k} = 1 \cdot 1{,}57 \cdot e^{-10 \cdot 0{,}252} = 0{,}127 \quad (\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

(d) $|p|$ en $z = -10{,}0$.

$$|p| = \rho g e^{kz} a = 815 \quad (\mathrm{Pa})$$

(e) En una onda, cada punto se mueve con la velocidad de fase.

$$C_p = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda} \approx 6{,}25 \quad (\mathrm{m/s})$$

(f) La energía se transfiere con la velocidad de grupo.

$$C_g = \frac{1}{2} C_p \approx 3{,}13 \quad (\mathrm{m/s})$$

(g)

$$T\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g a^2 = \frac{1}{8}\rho g H^2 \approx 5{,}027 \quad (\mathrm{KJ}/m^2)$$

(h)

$$\bar{\mathcal{F}} = \bar{E} \cdot C_g \approx 15{,}73 \quad (\mathrm{KJ/m \cdot s})$$