13.00 Introducción a la ciencia y tecnología oceánica
Soluciones del boletín de problemas 2

1. La velocidad debe cumplir la ecuación de continuidad, que se utiliza para fluidos incompresibles,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dado que $w = 0$, el tercer término desaparece, y si sustituimos la u que se nos proporciona, tenemos que:

$$2ax + by + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver para v:

$$v = -2axy - \frac{1}{2}by^2 + f(x, z),$$

donde $f(x, z)$ es una función arbitraria (el único requisito es que su derivada parcial respecto a y sea cero). Sin embargo, también se nos indica que $v = 0$ en $y = 0$, por lo que podemos deducir que $f(x, z)$ es cero. Por lo tanto:

$$v = -2axy - \frac{1}{2}by^2.$$

2. Si las distribuciones de velocidad establecidas son válidas para el movimiento de un fluido incompresible, se debe cumplir la forma simplificada de la ecuación de continuidad, como se mostró anteriormente.

(a.) Las derivadas de la velocidad que aquí interesan son los siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2Cxy}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2Cxy}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La suma de todas ellas es claramente cero y, por lo tanto, se cumple la ecuación de continuidad para el flujo de un fluido incompresible. El flujo se encuentra en todas partes a lo largo de los círculos que se centran en el origen y la magnitud de la velocidad es inversamente proporcional a la distancia desde el centro:

$$\mid \vec{u} \mid = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{C^2y^2 + C^2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\mid C \mid}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mid C \mid}{r},$$

donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. El flujo cerca del origen es indefinido en el lugar donde la velocidad tiende a infinito. Véase el esquema del Problema 3(a).

(b) Para $x^2 + y^2 > 1$, nos hallamos en el mismo caso que en (a). En la región $x^2 + y^2 < 1$, la ecuación de continuidad se cumple de un modo trivial, es decir, cada término por separado es igual a cero.

Por consiguiente, la continuidad se cumple en todas partes. En el límite entre las dos regiones, $x^2 + y^2 = 1$, las expresiones de velocidad en ambas regiones son constantes (proporcionan los mismos valores). En la región interna, la magnitud de la velocidad es $C(x^2 + y^2)^{1/2}$. Véase el esquema del Problema 3(b).

(c) Se añade un flujo uniforme al que se especificaba en el apartado (b) en la dirección z. Aún se cumple la ecuación de continuidad, puesto que $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$. para el flujo uniforme. El movimiento en el plano x-y es el mismo que en el apartado (b).

(d) Los dos primeros términos de la ecuación de continuidad son los mismos que los de los apartados (b) y (c) y, por consiguiente, su suma vuelve a ser cero. No obstante, el tercer término, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$, no es cero y, por lo tanto, no se cumple la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

Esquema para el Problema 3(a).

13.00, otoño 2002, soluciones del boletín de problemas 2

Esquema para el problema (b)

Esquema para el problema (e)

3. Para la descripción euleriana de un campo de flujo,

$$\mathbf{u} = 2z\vec{i} + xt\vec{j} + xy^2\vec{k} \text{ m/sec}$$

la aceleración $\vec{a}$ de la partícula de un fluido viene dada por la derivada principal $\frac{D\vec{u}}{Dt}$:

$$\frac{Du}{Dt} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u + \frac{\partial u}{\partial t} = 2xy^2$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + \frac{\partial v}{\partial t} = 2zt + x$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w + \frac{\partial w}{\partial t} = 2zy^2 + 2x^2yt$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = 2xy^2\vec{i} + (2zt + x)\vec{j} + (2zy^2 + 2x^2yt)\vec{k}$$

13.00, otoño 2002, soluciones del boletín de problemas 2

4.

Debido a la ambigüedad del enunciado, este problema podría enfocarse de varias formas. La presente solución supone que dos de las filas en el array de tiempo estaban cambiadas de lugar.

x	y	u	v
0	0	20	10
1	0	25	15
0	1	10	5

t	u	v
0	20	10
0.5	10	5

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

Necesitamos calcular los términos de manera numérica:

u en $x = 0, y = 0 = 20$

v en $x = 0, y = 0 = 10$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ en $x = 0 = 5$

$\frac{\partial v}{\partial x}$ en $x = 0 = 5$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ en $x = 0 =$ -10

$\frac{\partial v}{\partial y}$ en $x = 0 =$ -5

$\frac{\partial u}{\partial t}$ en $t = 0{,}0 =$ -20

$\frac{\partial v}{\partial t}$ en $t = 0{,}0 =$ -10

$$\frac{Du}{Dt} = 20(5) + 10(-10) - (20) = -20$$

Igualmente,

$$\frac{Dv}{Dt} = 20(50 + 10(-5) + -10 = 40$$

5. Un vehículo de control remoto (ROV) que mide la salinidad de agua se mueve a una velocidad $3xt\vec{i} + 3y^2\vec{j} - 2t\vec{k}$. La salinidad S del agua varía con las corrientes producidas por las mareas y viene dada por $S(x, y, z, t) = 2x\sin(at)$. Halle la tasa de cambio de salinidad del agua tal y como se mide con el ROV.

La tasa de cambio viene dada por $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} S + \frac{\partial S}{\partial t}$, donde $\vec{U} = U\hat{i} + U\hat{j} + W\hat{k}$ es la velocidad del ROV. Es decir:

$$U\frac{\partial S}{\partial x} + V\frac{\partial S}{\partial y} + W\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 6xt\sin(at) + 2ax\cos(at).$$