Teoría de la negociación I

MIT 14.126 Teoría de juegos
Paul Milgrom
Muhamet Yildiz

1

Teoría de la negociación

- **Cooperativa (Axiomática)**
  - **Edgeworth**
  - **Negociación Nash (*)**
  - **Variaciones de Nash**
    - **Kalai-Smorodinsky**
    - **Maschler-Perles**
    - **Igualitario-Equivalente**
    - **Utilitario, etc.**
  - **Valor Shapley (*)**
- No cooperativa
  - Rubinstein-Stahl (*) (info. completa)
  - Info. asimétrica.
    - Rubinstein, Admati-Perry, Cramton, …
  - Valoraciones a priori no comunes
    - Posner, Bazerman, Yildiz (*), …

2

Problema de la negociación de Nash

- $N = \{1,2\}$ – los agentes
- $S \subset R^N$ -- el conjunto de pares de utilidad esperada factibles
- $d = (d_1,d_2) \in S$ – los ajustes de desacuerdos
- Un *problema de negociación* es cualquier (S,d) donde
  - S es compacto y convexo, y
  - $\exists x \in S$ s.a. $x_1 > d_1$ y $x_2 > d_2$.
- B es el conjunto de todos los problemas de negociación.
- Una *solución de negociación* es cualquier función $f : B \to R^N$ s.a. $f(S,d) \in S$ para cada (S,d).

3

Axiomas de Nash

1. **Axioma de la utilidad esperada [EU]** (invarianza bajo transformaciones afines): $\forall(S,d), \forall(S',d'), a_i > 0$

$$\left.\begin{array}{l} S' = \{s' \mid s'_i = a_i s_i + b_i \ \forall i \in N\} \\ d'_i = a_i d_i + b_i \ \forall i \in N \end{array}\right\} \Rightarrow f_i(S',d') = a_i f_i(S,d) + b_i \ \forall i \in N$$

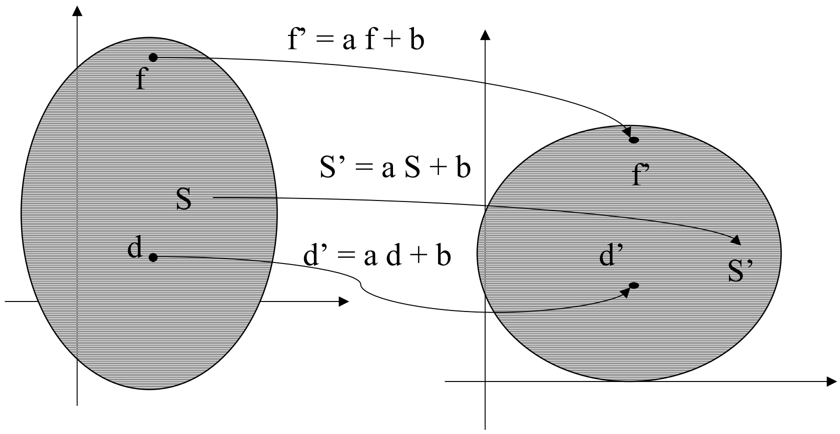
2. **Simetría [Sy]:** Sea (S,d) simétrico: $d_1 = d_2$ y $[(x_1,x_2) \in S$ si y sólo si $(x_2,x_1) \in S]$. Entonces,

$$f_1(S,d) = f_2(S,d).$$

3. **Independencia de alternativas irrelevantes [IIA]**: si $T \subset S$ y $f(S,d) \in T$, entonces $f(T,d) = f(S,d)$.
4. **Optimalidad de Pareto [PO]:** si $x,y \in S$ y $y > x$, entonces $f(S,d) \neq x$.

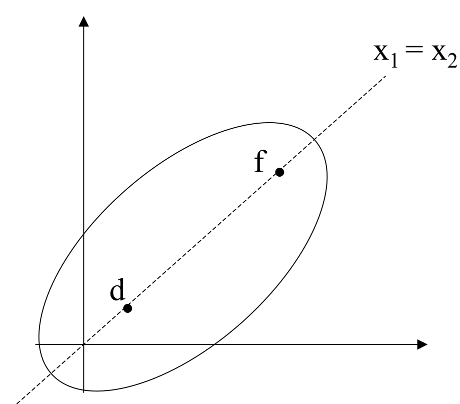
4

Axioma de utilidad esperada



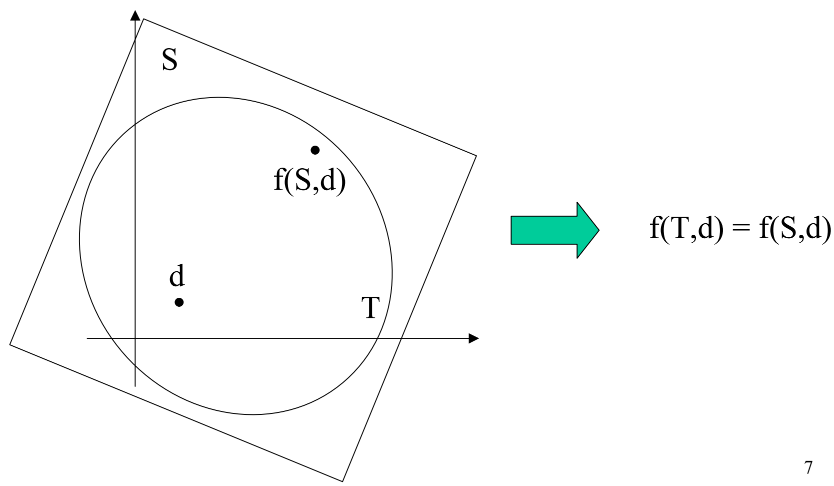
5

Simetría



6

Independencia de las alternativas irrelevantes



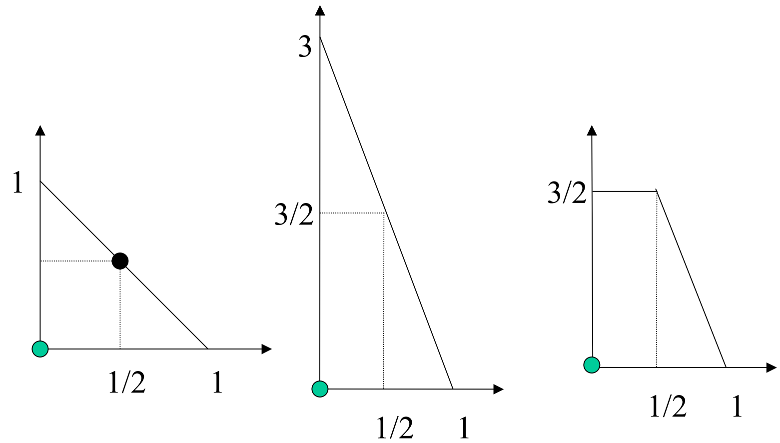
7

Solución de negociación de Nash

$$f^*(S,d) = \arg\max_{\substack{s\equiv(s_1,s_2)\in S \\ s>d}} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2).$$

8

Ejemplos



$$f^*(S,d) = \underset{\substack{s\equiv(s_1,s_2)\in S\\ s>d}}{\arg\max}\,(s_1-d_1)(s_2-d_2).$$

Teorema de Nash

Teorema: una solución de negociación f satisface los axiomas de Nash (EU,Sy,IIA,PO) si y sólo si:

$$f = f^*.$$

Axiomas de Nash

1. **Axioma de utilidad esperada** (invarianza bajo transformaciones afines): $\forall(S,d), \forall(S',d'),\ a_i > 0$

$$\left.\begin{array}{l} S' = \{s' \mid s'_i = a_i s_i + b_i\ \forall i \in N\} \\ d'_i = a_i d_i + b_i\ \forall i \in N \end{array}\right\} \Rightarrow f_i(S',d') = a_i f_i(S,d) + b_i\ \forall i \in N$$

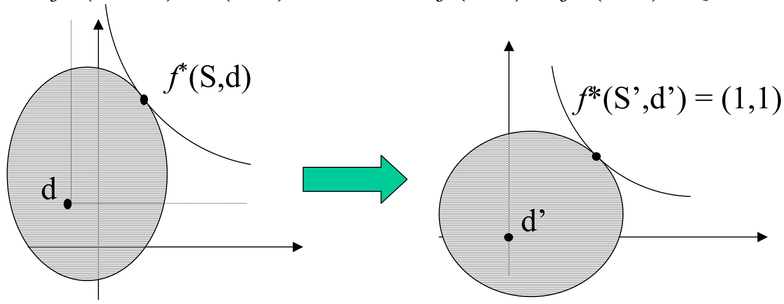
2. **Simetría:** Sea (S,d) simétrico: $d_1 = d_2$ y $[(x_1,x_2) \in S$ si y sólo si $(x_2,x_1) \in S]$. Entonces,

$$f_1(S,d) = f_2(S,d).$$

3. **Independencia de las alternativas irrelevantes**: si $T \subset S$ y $f(S,d) \in T$, entonces $f(T,d) = f(S,d)$.
4. **Optimalidad de Pareto:** si $x,y \in S$ y $y > x$, entonces $f(S,d) \neq x$.

Prueba del teorema de Nash

1. Compruebe: f^* satisface los axiomas de Nash. (fácil)
2. Tome cualquier (S,d). Transfórmelo a (S',d') tal que d'= 0, y f^*(S',d') = (1,1). Bajo [Sy,IIA,PO], f(S',d') = f^*(S',d') = (1,1). &EU $\Rightarrow$ f(S,d) = f^*(S,d). QED

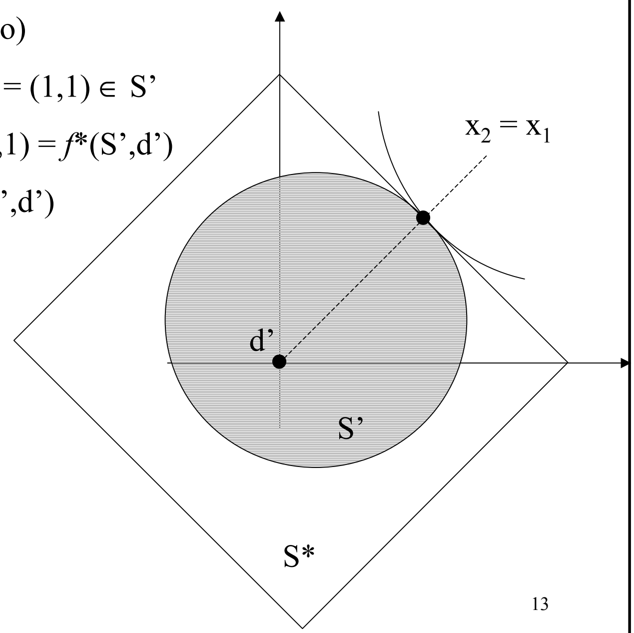


•S* es simetrica. (cómo)

•&Sy&PO $\Rightarrow f(S^*,d') = (1,1) \in S'$

•&IIA $\Rightarrow f(S',d') = (1,1) = f^*(S',d')$

•&EU $\Rightarrow f(S,d) = f^*(S',d')$



Una ampliación de Nash

5. **Racionalidad individual [IR]:** $f(S,d) \geq d$.

Teorema: hay exactamente dos soluciones de negociación que satisfacen los axiomas EU,Sy, IIA, y IR: f^* y D con $D(.,d) \equiv d$.

Prueba: [EU&IIA&IR] => (PO o $D(.,d) \equiv d$). QED

Nash asimétrico

Teorema: sea A = {x ≥ 0| $x_1+x_2 \leq 1$}. Para cualquier *a* en (0,1), existe un único b.s. f^a que satisface los axiomas EU,IIA, y IR, y $f^a(A,0) = (a,1-a)$;

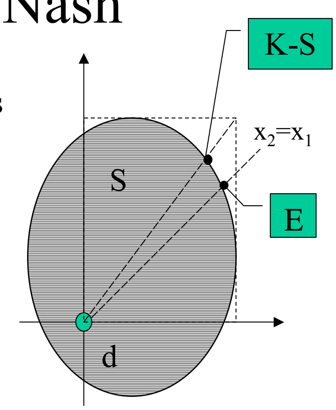
$$f^a(S,d) = \arg\max_{s\in S, s\geq d} (s_1 - d_1)^a (s_2 - d_2)^{1-a}$$

15

Variaciones de Nash

Cambiando los axiomas de Nash, muchos han caracterizado varios b.s. con varios axiomas, p.ej.,

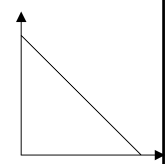
1. Kalai-Smorodinsky
   - Monotonicidad, EU, Sy, PO
2. Igualitario: max min{x_1,x_2}
3. Utilitario: max $a x_1 + b x_2$



16

Valor Shapley – negociación de n personas

- Un juego de coalición (N,v), donde v : $2^N \rightarrow R$. v(S) es la utilidad total máx. que la coalición S puede obtener en caso de desacuerdo con N\S.



- Una *solución de negociación* (o un *valor*) es cualquier función f que asigne una distribución f(S,v) en RS para cualquier coalición S, donde $\Sigma_i f_i(S,v) = v(S)$.
- La *contribución marginal* de *i* a S con $i \notin S$ es

$$D_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

17

Valor Shapley -- definición

- Una coalición $S_i = \{1,2,\ldots,i\}$
  - formada en el orden $\{1\} \rightarrow \{1,2\} \rightarrow \{1,2,3\} \rightarrow \ldots \rightarrow \{1,2,\ldots,i\text{-}1\} \rightarrow \{1,2,\ldots,i\text{-}1,i\}$;
  - el recién llegado tiene todo el poder de negociación.
- Entonces, $f_1(S_i,v) = v(\{1\})$, $f_2(S_i,v) = D_2(\{1\}) = v(\{1,2\}) - v(\{1\})$, … , $f_i(S_i,v) = D_i(S_{i-1}) = v(\{1,2\}) - v(\{1\})$.

- Coalición S
  - formada en orden aleatorio donde cada permutación es igualmente probable – hay |S|! Permutaciones;
  - el recién llegado tiene todo el poder de negociación.
- Entonces, valor Shapley (φ):

$$\varphi_i(S,v) = \frac{1}{|S|!}\sum_R D_i(S_i(R))$$

donde R es cualquier permutación, $S_i(R) = \{R(1),R(2),\ldots,i\}$.

18

Ejemplo -- Empresa

- $N = \{c\} \cup W$; c posee una fábrica; $w \in W$ es un trabajador. Sin c, los trabajadores producen 0; con c, m trabajadores producen p(m); p es cóncavo, aumentando, y p(0) = 0.
- $v(S) = p(|S \cap W|)$ if $c \in S$; v(S) = 0 de otro modo.

[O&R;259.3]

- $\varphi(c) = \varphi(\omega) = 0$;
- $A_m = \{c, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$
- $\varphi_c(A_m) = (p(1)+\ldots+p(m))/(m+1)$;
- $\varphi_w(A_m) = (p(m) - \varphi_c(A_m))/m$.

19

Ejemplo -- Mercado

- N = {1,2,3}; 1 es vendedor; 2, 3 son compradores:
- v(i) = 0; v(1,2) = v(1,3) = v(1,2,3) = 1; v(2,3) = 0.
- $\varphi_i(i) = 0$; $\varphi_1(1,i) = \varphi_i(1,i) = ½$; $\varphi_i(2,3) = 0$;
  $\varphi_1(1,2,3) = 2(0 + 1 + 1)/3! = 2/3$;
  $\varphi_2(1,2,3) = \varphi_3(1,2,3) = 1/3! = 1/6$.

[el precio es 2/3, y los compradores tienen la misma posibilidad de comprar]

- Núcleo(N,v) = {(1,0,0)}.

20

El valor Shapley y el núcleo

Teorema: para cualquier juego convexo (N,v), el valor Shapley (φ) está en el núcleo.

Prueba:

1. Como (N,v) es convexo, $\forall$ permuta R, g^R con $g_i^R(N,v) = D_i(S_i(R))$ está en el núcleo (clase anterior).
2. El valor Shapley es la media de g^R 's: $\varphi = \Sigma_R g^R/|N|!$
3. El núcleo es convexo.
4. El valor Shapley esta en el núcleo. QED

Axiomas de Shapley

1. **Simetría:** si i y j son intercambiables (p.ej., $D_i = D_j$), entonces
$$f_i(.,v) = f_j(.,v).$$
2. **Jugador dummy:** si i es *dummy* (i.e., $D_i = v(\{i\})$) entonces $f_i(.,v) = v(\{i\})$.
3. **Aditividad**: $f(.,v+w) = f(.,v) + f(.,w)$.

Teorema (Shapley)

El valor Shapley (φ) es la única solución de negociación (o valor) que satisface los axiomas Shapley (a saber, simetría, *dummy* y aditividad).

Prueba:

1. Compruebe: φ satisface los axiomas Shapley.
2. Existe un único valor f que satisface los axiomas Shapley. QED

23

Prueba (paso 2)

1. Fije N. Tal que, $(N,v) \equiv v \in R^{2^{|N|}-1}$.
2. Defina v_T por $v_T(S) = 1$ if $S \subseteq T$; $v_T(S) = 0$ de otro modo.
3. $(v_T)_{\varnothing \neq T \subseteq N}$ es una base para $R^{2^{|N|}-1}$:
   1. Suponga que $\Sigma_S b_S v_S = 0$, pero $b_T \neq 0$.
   2. $\exists T^* \subseteq T$ s.t. $b_{T^*} \neq 0$ & $b_{T'} = 0$ $\forall T' \subset T^*$.
   3. $\Sigma_S b_S v_S(T^*) = b_{T^*} \neq 0$, una contradicción.
4. $\forall v \in R^{2^{|N|}-1}$, $\exists$ un único $b \in R^{2^{|N|}-1}$ s.a. $v = \Sigma_S b_S v_S$.
5. A1&A2 => $f_i(a v_T) = a/|T|$ si $i \in T$; 0 de otro modo.
6. &A3 => $f_i(v) = f_i(\Sigma_S b_S v_S) = \Sigma_S f_i(b_S v_S) = \Sigma_{S \ni i} b_S/|S|$.

24

Contribuciones equilibradas

Un valor f satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si y sólo si $\forall(N,v)$, $\forall i,j$ en N,

$$f_i(N,v) - f_i(N\backslash\{i\}) = f_j(N,v) - f_j(N\backslash\{j\}).$$

Teorema: el valor de Shapley es la única solución de negociación que satisface la propiedad de contribuciones equilibradas.

Prueba: 1. Si f y f' satisfacen la propiedad, entonces f = f'.
2. el valor de Shapley satisface la propiedad. QED

25