Subastas 1:

Subastas comunes y equivalencia de ingresos

Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

Mapa de ruta

1. Subastas sencillas: definiciones y análisis de equilibrio.
2. Equivalencia de ingresos.
3. Subastas óptimas.
4. Desvíos del modelo simétrico *IPV* (valores privados independientes): clasificación de ingresos, principio de conexión.
5. Subasta inglesa y eficacia.
6. Colusión en subastas.
7. Subasta de múltiples unidades.

1 Carácterísticas principales

- Antiguo mecanismo de “mercado”.
- Uso generalizado. Muchas variedades.
- Juegos sencillos y transparentes (mecanismos).
- Funcionan bien en entornos de información incompleta. Vendedor (y a veces los postores) no saben cómo la otra parte valora el objeto.
- Optimalidad y eficiencia en una gran variedad de modelos.
- Tal vez el área más activa de investigación en economía.

2 Anotación (IPV simétrico)

Modelo de valores privados independientes con riesgo simétrico – compradores neutrales, sin límites de presupuesto.

- Objeto en venta único e indivisible.
- N compradores potenciales, indexados por i. N comúnmente conocidos por todos los postores.
- X_i – valoración del comprador i – máxima disposición de pagar por el objeto.
- $X_i \sim F[0, \omega]$ con continuo $f = F'$ y pleno apoyo.
- X_i es valor privado (señal); todos los X_i son iid, lo que es sabido por todos.

3 Subastas comunes

Licitación en pliego cerrado.

- **Primer precio en sobre cerrado:**

  Cada participante presenta una oferta $b_i \in \mathbb{R}$ (sellada o no observada por el resto). El ganador es el comprador con la oferta más alta, el ganador paga su puja.

- **Segundo precio en sobre cerrado:**

  Como la anterior, el ganador paga la segunda puja más alta - la más alta de las pujas de los otros.

- **Licitación del k-ésimo precio:**

  El ganador paga el k-ésimo precio más alto.

Subastas abiertas (DINÁMICAS).

- **Subasta holandesa:**

  Comienza al precio más alto del objeto, el que ningún participante está dispuesto a pagar. Va descendiendo hasta que uno de los participantes anuncia su deseo de pujar. Así obtiene el objeto.

  Nota: Las subastas holandesa y de primer precio son equivalentes en muchos sentidos.

- **Subasta inglesa:**

  Comienza con precio cero y va subiendo. Los participantes comienzan activos deseando comprar a cero. En un precio determinado, los participantes desean comprar a ese precio (activo) o no (inactivo). A medida que aumenta el precio, los participantes disminuyen(*) sus demandas. La subasta termina cuando sólo queda un participante activo. Éste es el ganador, paga el precio en el cual el resto de los participantes dejaron de pujar.

  Nota: la subasta inglesa es más o menos equivalente a la licitación de segundo precio.

4 Licitación de primer precio

Pagos

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i, & \text{if } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Propuesta: las estrategias de equilibrio simétrico en una licitación de primer precio vienen dadas por:

$$\beta^{\mathrm{I}}(x) = E\left[Y_1 | Y_1 < x\right],$$

donde $Y_1 = \max_{j \neq i}\{X_j\}$.

Prueba: es fácil comprobar que es estrategia equilibrada, derivémoslo.

Suponga que el resto de los participantes excepto i sigue estrictamente la estrategia de aumento (y diferenciable) $\beta(x)$.

Compensación del equilibrio: ganancia proveniente de vencer frente a la probabilidad de vencer.

El pago esperado del participante b cuando recibe x_i es:

$$G_{Y_1}(\beta^{-1}(b)) \times (x_i - b).$$

FOC:

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0.$$

En equilibrio simétrico, $b(x) = \beta(x)$, así FOC $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} G(x)\beta'(x) + g(x)\beta(x) &= xg(x), \\ \frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)) &= xg(x), \\ \beta(x) &= \frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)dy, \\ &= E\left[Y_1 | Y_1 < x\right]. \end{aligned}$$

En la licitación de primer precio el pago esperado es:

$$\begin{aligned} m^{\mathrm{I}}(x) &= \Pr[\mathrm{Win}] \times b(x) \\ &= G(x) \times E\left[Y_1 | Y_1 < x\right]. \end{aligned}$$

5 Ejemplos:

1. Suponga que los valores están uniformemente distribuidos en [0,1]

$F(x) = x$, entonces $G(x) = x^{N-1}$ y

$$\beta^{\mathrm{I}}(x) = \frac{N-1}{N}x.$$

2. Suponga que los valores están exponencialmente distribuidos en [0,∞]

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$**, para cierto** $\lambda > 0$ **y** $N = 2$**, entonces**

$$\begin{aligned} \beta^{\mathrm{I}}(x) &= x - \int_0^x \frac{F(y)}{F(x)}dy \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{xe^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}}. \end{aligned}$$

Observe que si, digamos para $\lambda = 2$, x es muy grande, la puja no excederá de 50 céntimos.

6 Licitación de segundo precio

Propuesta: en una licitación sellada de segundo precio, es una estrategia dominante débil pujar:

$$\beta^{\text{II}}(x) = x.$$

En la licitación de segundo precio, el pago esperado del ganador con x es el valor esperado de la segunda puja más alta dado x, que es la expectativa del segundo valor más alto dado x.

Así, el pago esperado en la licitación de segundo precio es:

$$\begin{aligned} m^{\text{I}}(x) &= \text{Pr[Win]} \times E\left[Y_1 | Y_1 < x\right] \\ &= G(x) \times E\left[Y_1 | Y_1 < x\right]. \end{aligned}$$