

Solución de negociación de Nash y juegos de ofertas alternativas

MIT 14.126 Teoría de juegos

1

Modelo de negociación de Nash

Formulación
Axiomas e implicaciones

2

Elementos

- ◆ El conjunto de negociación: S
 - Pares de utilidad alcanzables por acuerdo
 - ¿Cuándo? ¿Acuerdo inmediato?
- ◆ Punto de desacuerdo: $d \in \mathbb{R}^2$
 - ¿Resultado del acuerdo retrasado infinitamente?
 - ¿Pago durante la negociación?
 - ¿Opción externa?
- ◆ Solución: $f(S,d) \in \mathbb{R}^2$ es el resultado previsto de la negociación

Imposibilidad de la teoría ordinal

- ◆ Sea (S,d) como sigue
$$d = (0,0), S = \{x \geq 0 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$$
- ◆ Represente pagos "equivalentes" mediante (u_1, u_2) donde
$$u_1 = x_1^5, u_2 = 1 - (1 - x_2)^5$$
- ◆ Entonces, el conjunto de negociación es:
$$d' = (0,0), S' = \{u \geq 0 \mid u_1 + u_2 \leq 1\}$$
- ◆ La preferencia ordinal sobre el resultado de la negociación contiene muy poca información para identificar una solución única.

Suposiciones iniciales de Nash

- ◆ Cardinalización por preferencia de riesgo
 - ¿Por qué?
 - ¿Qué alternativas existen?
- ◆ Suponga que el conj. de negociación S es convexo
 - ¿Por qué?

5

Axiomas de Nash

- ◆ Independencia de alternativas irrelevantes (IIA)
 - Si $f(S,d) \in T \subset S$, entonces $f(T,d) = f(S,d)$
- ◆ Independencia de transformaciones lineales positivas (IPLT)
 - Sea $h_i(x_i) = \alpha_i x_i + \beta_i$, donde $\alpha_i > 0$, para $i=1,2$.
 - Suponga que $a = f(S,d)$. Sea $S' = h(S)$ y $d' = h(d)$. Entonces, $f(S',d') = h(a)$.
- ◆ Eficiencia
 - $f(S,d)$ está en la frontera Pareto de S
- ◆ Simetría
 - Suponga $d' = (d_2, d_1)$ y $x \in S \Leftrightarrow (x_2, x_1) \in S'$. Entonces, $f_1(S,d) = f_2(S',d')$ y $f_2(S,d) = f_1(S',d')$.

6

Independencia de alternativas irrelevantes (IIA)

- ◆ Enunciado de la condición IIA
 - Si $f(S,d) \in T \subset S$, entonces $f(T,d) = f(S,d)$
- ◆ Definiciones.
 - $Vex(x,y,d) =$ cápsula convexa de $\{x,y,d\}$.
 - $xP_d y$ significa $x = f(Vex(x,y,d),d)$.
 - xPy significa $x = f(Vex(x,y,0),0)$
- ◆ Mediante IIA, estos son equivalentes
 - $x = f(S,d)$
 - $xP_d y$ para todo y en S

-

Eficiencia

- ◆ Enunciado de la condición de eficiencia
 - $f(S,d)$ está en la frontera de Pareto de S
- ◆ Implicaciones
 - Las relaciones de preferencia P_d están "aumentando"

-

Transformaciones lineales positivas

◆ Enunciado de la condición IPLT

- Sea $h_i(x_i) = \alpha_i x_i + \beta_i$, donde $\alpha_i > 0$, para $i=1,2$.
- Suponga que $a=f(S,d)$. Sea $S'=h(S)$ y $d'=h(d)$. Entonces, $f(S',d')=h(a)$.

◆ Implicaciones

- $xP_d y$ si y sólo si $(x-d)P(y-d)$
- Suponga que $d=0$ y $x_1 x_2 = 1$.
 - ◆ Si $(x_1, x_2)P(1,1)$ entonces, $(1,1)P(1/x_1, 1/x_2) = (x_2, x_1)$

9

Simetría

◆ Enunciado de la condición de simetría

- Suponga que $d'=(d_2, d_1)$ y $x \in S \Leftrightarrow (x_2, x_1) \in S'$. Entonces, $f_1(S,d)=f_2(S',d')$ y $f_2(S,d)=f_1(S',d')$.

◆ Implicación

- Cuando $d=(0,0)$, (x_1, x_2) es indiferente a (x_2, x_1) .

◆ IPLT + Simetría implica

- $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x$ es indiferente a $(1,1)$.
- $x_1 x_2 = y_1 y_2 \Rightarrow x$ es indiferente a y .

10

Un teorema de Nash

- ### ◆ Teorema. La solución de negociación única que satisface los cuatro axiomas viene dada por:

$$f(S,d) \in \arg \max_{x \in S} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$$

- ### ◆ Pregunta: ¿necesitábamos convexidad para este argumento?

11

Negociación de oferta alternativa

◆ Dos modelos

- Ambos modelos tienen dos negociadores, conj. factible S
- Rondas múltiples: negociador 1 hace ofertas en rondas impares, negociador 2 en las pares
- Una oferta puede ser
 - ◆ Aceptada, con lo que finaliza el juego
 - ◆ Rechazada, con lo que se pasa a otra ronda
 - ◆ Posibles resultados
 - No se llega nunca a un acuerdo
 - El acuerdo se alcanza en la ronda t

12

Modelo 1: riesgo de ruptura

- ◆ Tras un rechazo en cada ronda, existe la probabilidad p de que el juego termine y los jugadores reciban el par de pago d .
 - El resultado de equilibrio mejor para el jugador 1 cuando mueve primero es un par (x_1, x_2) en la frontera de S .
 - El resultado de equilibrio peor para el jugador 2 cuando mueve primero es un par (y_1, y_2) en la frontera de S .
 - Relaciones:

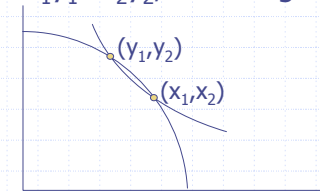
$$x_2 = (1-p)y_2 + pd_2$$

$$y_1 = (1-p)x_1 + pd_1$$

13

El producto mágico Nash

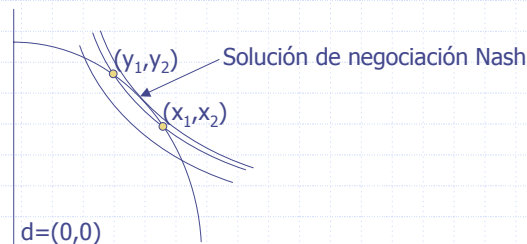
- ◆ Manipulación de las ecuaciones:
$$x_2 - d_2 = (1-p)(y_2 - d_2)$$
$$(1-p)(x_1 - d_1) = y_1 - d_1$$
$$(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) = (y_1 - d_1)(y_2 - d_2)$$
- ◆ Tomando $d=(0,0)$, una solución es un cuadruple (x_1, y_1, x_2, y_2) tal que $x_1 y_1 = x_2 y_2$, como sigue:



14

Resultado principal

- ◆ Teorema. Como $p \rightarrow 0$, (x_1, x_2) y (y_1, y_2) (funciones de p) convergen en $f(S, d)$.
- ◆ Prueba. Observe: $y_1 = (1-p)x_1$ y $x_2 = (1-p)y_2$ y...



15

Comentario

- ◆ Hechos y representaciones
 - La utilidad cardinal se introduce *porque el riesgo está presente*
 - El riesgo es que el punto de desacuerdo d pueda ser el resultado.
 - La estadística comparativa (la aversión al riesgo daña al negociador) es interpretable en estos términos.

16

Opciones externas

- ◆ Modifique el modelo para que en cualquier momento t , un negociador pueda retirarse y hacer que ocurra el resultado $z \in S$
 - ¿Es z un punto de amenaza adecuado?
- ◆ Dos casos:
 - Si $z_1 \leq y_1$ y $z_2 \leq x_2$, el resultado de equilibrio perfecto del subjuego no varía.
 - De otro modo, plus de eficiencia
$$x_2 = \max [z_2, (1-p)y_2]$$
$$y_1 = \max [z_1, (1-p)x_1]$$

17

Modelo 2: preferencia temporal

- ◆ Un resultado consiste en un acuerdo x y fecha t .
- ◆ Suposiciones del modelo de preferencia temporal
 - Existe un acuerdo indiferente de tiempo n
 - Impaciencia: $(x,0)P(n,0)$ and $t < t'$ imply $(x,t)P(x,t')$
 - Estacionalidad: $(x,t)P(x',t')$ implica $(x,t+s)P(x',t'+s)$.
 - El tiempo importa (+continuidad): $(x,0)P(y,0)P(n,0)$ implica que existe cierto t tal que $(y,t)I(x,0)$.
- ◆ Teorema. Para todo $\delta \in (0,1)$, hay una función u tal que $(x,t)P(x',t')$ si y sólo si $u(x)\delta^t > u(x')\delta^{t'}$. En especial, $u(n)=0$.

18

Ejercicio de prueba

- ◆ Los mismos axiomas implican que las preferencias se pueden expresar como:
$$v(x) - t \cdot \ln(\delta)$$
- ◆ Ejercicio: interpretar t como dinero en lugar de tiempo.
 - Enuncia axiomas similares acerca de preferencias (acuerdo, pago) sobre pares.
 - Utilícelas para probar la representación casi lineal de que existe una función v tal que $(x,0)$ se prefiere a (y,t) si y sólo si $v(x) > v(y) + t$.

19

Representación de la preferencia temporal

- ◆ Teorema. Suponga que u y v son funciones positivas con la propiedad de que $v(x) = [u(x)]^A$ para cierto $A > 0$. Entonces $u(x)\delta^t$ y $v(x)\varepsilon^t$ representan las mismas preferencias si y sólo si $\varepsilon = \delta^A$.
- ◆ Prueba. Ejercicio.

20

Estadística comparativa

- ◆ Los siguientes cambios de preferencia son equivalentes
 - De $u(x)\delta^t$ a $u(x)\varepsilon^t$
 - De $u(x)\delta^t$ a $v(x)\delta^t$, donde $v(x)=u(x)^A$ y $A=\ln(\delta)/\ln(\varepsilon)$.
- ◆ Por tanto, para un fijo δ , una mayor impaciencia se asocia a una "mayor concavidad" de u .

21

Negociar con preferencia temporal

- ◆ Este modelo es idéntico al de preferencia de riesgos, pero con una interpretación diferente.
- ◆ Sea $\delta \in (0,1)$ y las funciones de utilidad corresp. u_1 y u_2 tal que las preferencias del negociador j sobre el resultado (z,t) estén representadas por $x_j = \delta^t u_j(z)$.
 - El resultado de equilibrio mejor para el jugador 1 cuando mueve primero es un par (x_1, x_2) en la frontera de S .
 - El resultado de equilibrio peor para el jugador 2 cuando mueve primero es un par (y_1, y_2) en la frontera de S .
 - Relaciones:

$$x_2 = \delta y_2, y_1 = \delta x_1$$

$$x_1 x_2 = y_1 y_2$$

22

Conclusiones generales

- ◆ Principio de cardinalización
 - El modo adecuado de cardinalizar preferencias depende de la fuente de pérdidas de negociación que implusa a los jugadores a tomar una decisión.
- ◆ Principio de la opción externa
 - Las opciones externas no son "puntos de desacuerdo" y afectan al resultado sólo si son mejores para al menos una parte que el resultado de negociación planificado.

23

Fin

24