Juegos supermodulares

Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

(Gracias a Jonathan Levin)

1 Estática comparativa monótona

Suponga que $X \subset \mathbb{R}$ **y que** T **está ordenado parcialmente.**

Definición: una función $f: X \times T \to \mathbb{R}$ **tiene diferencias cada vez mayores en (**x, t**) para todo** $x' \geq x$ y $t' \geq t$.

$$f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t).$$

Así, $f(x', t) - f(x, t)$ **es no decreciente en** t.

Simetría: $f(x, t') - f(x, t)$ **es no decreciente en** x.

Lema: si $f \in C^2$, **entonces** f **tiene diferencias en aumento** $\Leftrightarrow t' \geq t$ **implica** $f_x(x, t') \geq f_x(x, t)$ **para todo** x, **esto es:**

$$f_{xt}(x, t) \geq 0 \text{ para todo } x, t.$$

Defina

$$x(t) = \arg\max_{x \in X} f(x,t).$$

Teorema 1: (Topkis) Suponga que $X \subset \mathbb{R}$ es un compacto y que T está parcialmente ordenado.

Suponga que $f: X \times T \to \mathbb{R}$ tiene ID y es semicontinuo superior en x. Entonces,

(i) Para todo $t, x(t)$ existe, tiene elementos mayores y menores $\overline{x}(t)$ y $\underline{x}(t)$;

(ii) Para $t' \geq t,\ x(t') \geq x(t)$ en $\bar{x}(t') \geq \bar{x}(t)$ y $\underline{x}(t') \geq \underline{x}(t)$.

2 Retículas

Sea X un conjunto parcialmente ordenado con orden $\geq$.

(piense $X \subset \mathbb{R}$ y $x \geq y \iff x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, .., n$)

Defina

"join" : $x \vee y = \inf\{z \in X : z \geq x, z \geq y\}$,

"meet" : $x \wedge y = \sup\{z \in X : z \leq x, z \leq y\}$.

En $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x \vee y)_i &= \max(x_i, y_i), \\ (x \wedge y)_i &= \min(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Definición: $(X, \geq)$ es una subretícula si está cerrada bajo $\vee$ y $\wedge$

3 Funciones supermodulares

Definición: la función de pago u_i es supermodular en x_i si, por cada $x_{-i} \in X_{-i}$ **y** $x_i, x_i' \in X_i$

$$u(x_i, x_{-i}) + u(x_i', x_{-i}) \leq u(x_i \vee x_i', x_{-i}) + u(x_i \wedge x_i', x_{-i}).$$

Nota: si $x_i \geq x_i'$ **la supermodularidad (comparable) se satisface trivialmente,**

Definición: la función de pago u_i es supermodular si para todo $x, x' \in X$.

$$u_i(x \vee x') + u_i(x \wedge x') \geq u_i(x) + u(x').$$

Teorema: supermodularidad $\Rightarrow$ supermodularidad en x_i y diferencias en aumento.

4 Juegos supermodulares

Juegos con "complementaridades estratégicas".

Definición: el juego $(S_1, \ldots, S_I, u_1, \ldots, u_I)$ **es un juego supermodular si para todo i: (la definición general está entre paréntesis).**

- S_i **es un subconjunto compacto de** □ **(S_i es subretícula)**
- u_i **es semicontinuo superior en** s_i, s_{-i} **(u_i es supermodular en s_i)**
- u_i **tiene diferencias cada vez mayores en** (s_i, s_{-i}).

Teorema 2: Suponga que (S, u) es un juego supermodular, sea:

$$BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Entonces,

(i) $BR_i(s_{-i})$ **tiene los elementos mayores y menores** $\overline{BR}_i(s_{-i})$ **y** $\underline{BR}_i(s_{-i})$**.**

(ii) Si $s'_{-i} \geq s_{-i}$, **entonces** $\overline{BR}_i(s'_{-i}) \geq \overline{BR}_i(s_{-i})$ **y** $\underline{BR}_i(s'_{-i}) \geq \underline{BR}_i(s_{-i})$**.**

5 Ejemplos

5.1 Juego de la inversión

Las firmas 1,...,I realizan inversiones simultáneas $s_i \in \{0, 1\}$ **y los pagos son:**

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} \pi\left(\sum_{j=1}^{I} s_j\right) - k, & \text{if } s_i = 1, \\ 0, & \text{if } s_i = 0, \end{cases}$$

donde p **está en aumento.**

5.2 Competición Bertrand

Las firmas 1,...,I escogen precios simultáneamente, y

$$D_i(p_i, p_{-i}) = a_i - b_i p_i + \sum_{j \neq i} d_{ij} p_j,$$

where $b_i, d_{ij} \geq 0$. Entonces $S_i = \mathbb{R}_+$ y

$$\begin{aligned} \pi_i(p_i, p_{-i}) &= (p_i - c_i)\, D_i(p_i, p_{-i}), \\ \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i \partial p_j} &= d_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

5.3 Competición Cournot

El oligopolio de Cournot es supermodular sólo si N = 2 y $s_1 = q_1$, $s_2 = -q_2$.

5.4 Modelo de búsqueda Diamond

I **realizando esfuerzos en busca de socios comerciales:**

e_i **y** $c(e_i)$ **– esfuerzo y coste de esfuerzo del agente** i,

$$u_i(e_i, e_{-i}) = e_i \cdot \sum_{j \neq i} e_j - c(e_i)$$

tiene diferencias en aumento en e_i, e_{-i}.

6 Resolución del juego de Bertrand.

Suponga que hay 2 firmas, $D_i(p_i, p_j) = 1 - 2p_i + p_j$, y $c = 0$. Suponga $S_i^0 = [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \pi_i(p_i, p_{-i}) &= p_i(1 - 2p_i + p_j), \\ \frac{\partial \pi_i(p_i, p_{-i})}{\partial p_i} &= 1 - 4p_i + p_j. \end{aligned}$$

La eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas da:

- **Cualquier** $p_i < ¼$ **está estrictamente dominado por** $p_i = ¼$; **cualquier** $p_i < ½$ **está estrictamente dominado por** $p_i = ½$.

Así, $S_i^1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. **Observe que** $S_i^1 = BR_i(S_j^0)$.

- **Repitiendo el proceso tenemos** $S_i^k = BR_i(S_j^{k-1})$.

- **Converge en el punto** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

7 Resultado principal

Teorema 3: sea (S,u) un juego supermodular. El conjunto de estrategias que sobreviven a la dominancia estricta iterada tiene como elementos mayor y menor $\overline{s}$ y $\underline{s}$ y son ambos equilibrios Nash.

Corolario:

1. **El equilibrio Nash puro estratégico existe en los juegos supermodulares.**

2. **Las estrategias mayores y menores compatibles con el dominio estricto iterado, la racionabilidad, el equilibrio correlado y el equilibrio de Nash son las mismas.**

3. **Si un juego supermodular tiene un equilibrio de Nash único, entonces es resoluble por dominancia (y así muchas reglas de aprendizaje o ajuste convergerán en él (p ej.: dinámica de la mejor respuesta)).**

7.1 Prueba del teorema 3

- **Itere el mapa de la mejor respuesta.**

- $S^0 = S;\ s^0 = (s_1^0, \ldots, s_I^0)$ – **mayor elemento en** S^0.

$$s_i^1 = \overline{BR}_i(s_{-i}^0);\ S_i^1 = \left\{s_i \in S_i^0 : s_i \le s_i^1\right\}.$$

- **Cualquier** $s_i \notin S_i^1$ **es dominado por** s_i^1 **porque:**

$$\begin{aligned} & u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s_i^1, s_{-i}) \\ \le\ & u_i(s_i, s_{-i}^0) - u_i(s_i^1, s_{-i}^0) < 0. \end{aligned}$$

- $s_i^k = \overline{BR}_i(s_{-i}^{k-1});\ S_i^k = \left\{s_i \in S_i^{k-1} : s_i \le s_i^{k-1}\right\}.$

$$\begin{aligned} s^k &\le s^{k-1} \Longrightarrow \\ s_i^{k+1} &= \overline{BR}_i(s_{-i}^k) \ge \overline{BR}_i(s_{-i}^{k-1}) = s_i^k. \end{aligned}$$

- **Defina**

$$\bar{s}_i = \lim_{k\to\infty} s_i^k.$$

Sólo las estrategias $s_i \leq \bar{s}_i$ **no están dominadas**

- $\bar{s} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_I)$ **- equilibrio Nash, ciertamente**

$$\begin{aligned} u_i(s_i^{k+1}, s_{-i}^k) &\geq u_i(s_i, s_{-i}^k), \\ u_i(\bar{s}_i, \bar{s}_{-i}) &\geq u_i(s_i, \bar{s}_{-i}). \end{aligned}$$

- **Del mismo modo defina** $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_I^0)$ – **el elemento más pequeño en** S^0

$s_i^1 = \underline{BR}(s_{-i}^0);\ S_i^1 = \left\{ s_i \in S_i^0 : s_i \geq s_i^1 \right\}$ **y así...**

- **Obtenga** $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_I)$ **pruebe que es equilibrio Nash**

8 Propiedades de los juegos supermodulares

Idea: utilice la monotocidad para obtener resultados estáticos comparativos.

- **Un juego supermodular (*S, u*) es indexado por *t* si cada función de pago de los jugadores es indexada por** $t \in T$, **algún conjunto ordenado y para todo** i $u_i(s_i, s_{-i}, t)$ **tiene diferencias en aumento en** (s_i, t).

Propuesta: suponga (*S, u*) es un juego supermodular indexado por *t*. Los equilibrios Nash mayores y menores aumentan en *t*.

- **Un juego supermodular (*S, u*) tiene efectos secundarios positivos si para todo** i, $u(s_i, s_{-i})$ **aumenta en** s_{-i}

Propuesta: suponga que (*S, u*) es un juego supermodular con efectos secundarios positivos. Entonces el equilibrio Nash más grande es Pareto preferente.