Subastas 2:

Equivalencia de ingresos Subastas óptimas

Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

1 Anotación (IPV)

Modelo de valores privados independientes con compradores neutrales al riesgo, sin limitación de presupuesto.

- **Objeto en venta único e indivisible.**
- N **compradores potenciales, indexados por** i. N **comúnmente conocidos por todos los postores.**
- X_i – **valoración del comprador** i – **máxima disposición de pagar por el objeto.**
- $X_i \sim F_i[0, \omega_i]$ **con continuo** $f_i = F_i'$ **y pleno apoyo, independiente entre los compradores.**
- $\mathcal{X} = \times_{i=1}^{N} \mathcal{X}_i,\ \mathcal{X}_{-i} = \times_{j \neq i} \mathcal{X}_j,\ f(\mathrm{x})$ **es densidad conjunta.**

2 Mecanismos

Un mecanismo de venta $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$:

- $\mathcal{B}_i$ **- un conjunto de mensajes (o pujas) para el jugador** i.
- $\pi : \mathcal{B} \to \Delta$ **- regla de distribución; aquí Δ es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre** N **.**
- $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ **- regla de pago.**

Ejemplo: licitaciones de primer y segundo precio.

Todo mecanismo define un juego de información incompleta:

- $\beta_i : [0, \omega_i] \to \mathcal{B}_i$ **es una estrategia.**
- **El equilibrio se define en consecuencia.**

3 Principio de revelación

Mecanismo directo (Q, M**):**

- $\mathcal{B}_i = \mathcal{X}_i$;
- $\mathrm{Q} : \mathcal{X} \to \Delta$**, donde** $Q_i(\mathrm{x})$ **es la probabilidad de que** i **obtenga el objeto**.
- $\mathrm{M} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$**, donde** $M_i(\mathrm{x})$ **es el pago esperado por** i.

Propuesta: (principio de revelación) dado un mecanismo y un equilibrio para dicho mecanismo, existe un mecanismo directo en el que:

1. **es un equilibrio para que cada participante diga la verdad, y**
2. **los resultados sean los mismos.**

Prueba: defina $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = \pi(\beta(\mathrm{x}))$ **y** $\mathrm{M}(\mathrm{x}) = \mu(\beta(\mathrm{x}))$**. Verifique.**

4 Compatibilidad de incentivos

Defina $q_i(z_i)$ y $m_i(z_i)$ para ser la probabilidad de que i obtenga el objeto y el pago esperado de revelar z_i mientras que el resto de participantes dicen la verdad

$$\begin{aligned} q_i(z_i) &= \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \mathrm{x}_{-i}) f_{-i}(\mathrm{x}_{-i}) \mathrm{d}\mathrm{x}_{-i}, \\ m_i(z_i) &= \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \mathrm{x}_{-i}) f_{-i}(\mathrm{x}_{-i}) \mathrm{d}\mathrm{x}_{-i}. \end{aligned}$$

El pago esperado del comprador i with value x_i y revelando z_i es:

$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

El mecanismo directo (Q, M) es *compatible con incentivos* (IC) si $\forall i, x_i, z_i$, la *función de pago de equlibrio* $U_i(x_i)$ satisface:

$$U_i(x_i) \equiv q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

***IC* implica que**

$$U_i(x_i) = \max_{z_i \in \mathcal{X}_i} \{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}$$

— maximo de una familia de funciones afines, así, $U_i(x_i)$ es convexo.

Comparando los pagos esperados del comprador i con z_i de revelar la verdad (z_i) y de revelar x_i, obtenemos:

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$

así $q_i(x_i)$ es la curva de la línea que “apoya” $U_i(x)$ en x_i.

U_i convexo $\rightarrow$

U_i **es absolutamente continuo** $\rightarrow$

U_i **es diferenciable en casi todas partes** $(U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ **y así** $q_i(x_i)$ **es no decreciente)** $\rightarrow$

U_i **es la integral de su derivada:**

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

Conclusión: el pago esperado a un comprador en un mecanismo directo compatible de incentivos (Q, M**) depende (hasta una constante) *sólo* de la regla de distribución** Q**.**

Nota: $IC \Longleftrightarrow q_i(x)$ **es no decreciente.**

5 Equivalencia de ingresos

Propuesta: (equivalencia de ingresos) si el mecanismo directo (Q, M**) es compatible con incentivos, entonces** $\forall i, x_i$ **el pago esperado es:**

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

Así, los pagos esperados (así como los ingresos esperados del vendedor) en cualesquiera dos mecanismos IC con la misma regla de distribución son equivalentes hasta una constante.

Prueba: $U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$, $U_i(0) = -m_i(0)$

Sustituya.

5.1 Una aplicación de la equivalencia de ingresos

Considere un entorno simétrico (iid).

En la subasta de segundo precio:

$$\beta^{\mathrm{II}}(x) = x.$$

y

$$m^{\mathrm{II}}(x) = G(x) \times E\left[Y_1 | Y_1 < x\right].$$

En la subasta de segundo precio, ya que

$$m^{\mathrm{I}}(x) = G(x) \times b(x)$$

obtenemos

$$\beta^{\mathrm{I}}(x) = E\left[Y_1 | Y_1 < x\right]$$

En la subasta del tipo *Todos pagan*

$$m^{\mathrm{A}}(x) = \beta^{\mathrm{A}}(x) = G(x) \times E\left[Y_1 | Y_1 < x\right].$$

6 Racionalidad individual

El mecanismo directo (Q, M) es racional individualmente (IR) si $\forall i, x_i,$

$$U_i(x_i) \geq 0.$$

Corolario: si el mecanismo(Q, M) es *IC* entonces es *IR* para todos los compradores $U_i(0) \geq 0$ (o $m_i(0) \leq 0$).

7 Mecanísmos óptimos

Considere el mecanismo directo (Q, M).

El ingreso esperado para el vendedor es

$$\begin{aligned}
E[R] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E[m_i(X_i)], \text{ donde} \\
E[m_i(X_i)] &= \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\
&= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i \\
&\quad - \int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i.
\end{aligned}$$

El último término es igual a (con variables cambiantes de integración)

$$\int_0^{\omega_i} \int_{t_i}^{\omega_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dx_i dt_i = \int_0^{\omega_i} (1 - F_i(t_i))\, q_i(t_i) dt_i.$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}
&E[m_i(X_i)] \\
&= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\
&= m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}) d\mathrm{x}.
\end{aligned}$$

El mecanismo óptimo maximiza $E[R]$ sujeto a: IC e IR.

8 Solución

Defina la valoración virtual de un comprador con valor x_i como

$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}.$$

Entonces el vendedor debería elegir (Q, M) para máx.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathrm{x}) \right) f(\mathrm{x}) d\mathrm{x}.$$

Observe $\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathrm{x})$. Es mejor dar los pesos más altos $Q_i(\mathrm{x})$ a el máximo $\psi_i(x_i)$.

El problema de diseño es regular si para $\forall i,\ \psi_i(\cdot)$ es una función de aumento de x_i

La regularidad implicaría la compatibilidad de incentivosdel mecanismo óptimo.

He aquí el mecanismo óptimo (Q, M):

- **Regla de distribución Q:**

$$Q_i(\mathrm{x}) > 0 \Longleftrightarrow \psi_i(x_i) = \max_{j \in \mathcal{N}} \psi_j(x_j) \geq 0.$$

$(q_i(x_i)$ es no decreciente si $\psi_i(x_i)$ lo es, así tenemos IC.

- **Regla de pago M: (implícita por IC e IR)**

$$M_i(\mathrm{x}) = Q_i(\mathrm{x}) x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathrm{x}_{-i}) dz_i.$$

$(M_i(0, \mathrm{x}_{-i}) = 0$ para todo x_{-i} y así $m_i(0) = 0$, así tenemos IR)

Defina

$$y_i(\mathrm{x}_{-i}) = \left\{ \inf z_i : \psi_i(z_i) \geq 0 \ \textbf{ y } \ \psi_i(z_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \right\}$$

— el valor más pequeño de i que "gana" frente a x

Así,

$$Q_i(z_i, \mathrm{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, \ \text{si } z_i > y_i(\mathrm{x}_{-i}), \\ 0, \ \text{si } z_i < y_i(\mathrm{x}_{-i}). \end{cases}$$

Tenemos

$$\int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathrm{x}_{-i}) = \begin{cases} x_i - y_i(\mathrm{x}_{-i}), \ \text{si } z_i > y_i(\mathrm{x}_{-i}), \\ 0 \qquad\qquad\quad , \ \text{si } z_i < y_i(\mathrm{x}_{-i}). \end{cases}$$

y así,

$$M_i(\mathrm{x}) = \begin{cases} y_i(\mathrm{x}_{-i}), \ \text{si } Q_i(\mathrm{x}) = 1, \\ 0 \qquad\quad , \ \text{si } Q_i(\mathrm{x}) = 0. \end{cases}$$

Propuesta: suponga que el problema de diseño es regular y simétrico. Entonces, una subasta de segundo precio con un precio de reserva $r^* = \psi^{-1}(0)$ es un mecanismo óptimo.