Aprendizaje 1*
Juego ficticio

14.126 Teoría de juegos

Sergei Izmalkov

Muhamet Yildiz

*Agradecimiento especial a Paul Milgrom por permitirnos utilizar sus diapositivas del 14.126 (otoño 2001)

- "A fin de cuentas, no se puede decir que los insectos piensen y, por tanto, la racionalidad no puede ser tan crucial cuando la teoría de juegos se las apaña para predecir su comportamiento en condiciones adecuadas. Al mismo tiempo, con la llegada de la economía experimental caímos en la cuenta de que los seres humanos tampoco son gran cosa pensando. Cuando hallan el equilibrio de un juego, lo suelen hacer utilizando métodos de prueba y error".

Ken Binmore

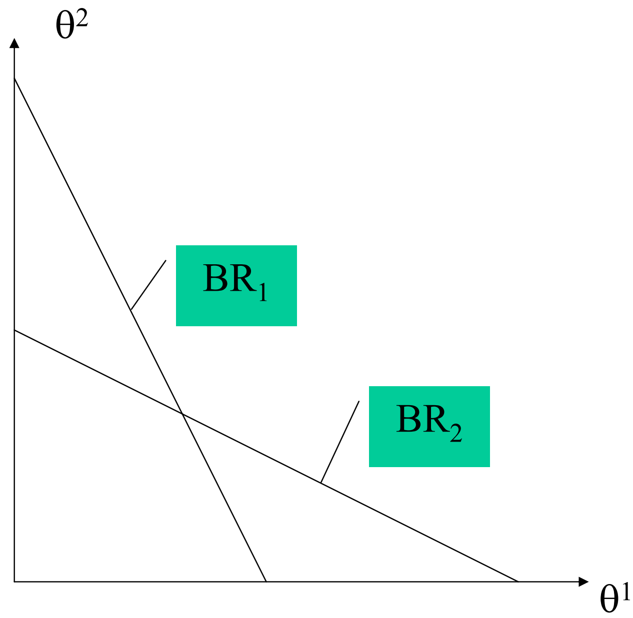
Mapa de ruta

1. Juego ficticio
2. Mecanismos de evolución y consolidación – dinámica de réplica
3. Modelos de ajuste con aleatoriedad persistente;
4. Aprendizaje en juegos extensivos, racionalidad, etc.

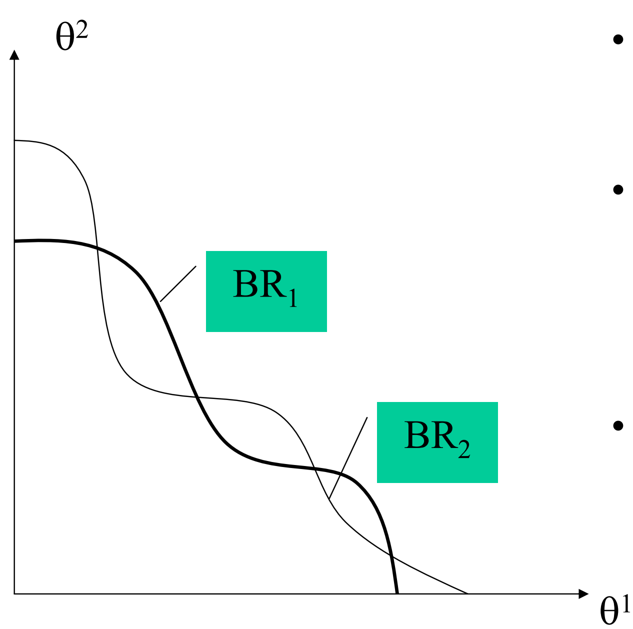
Mapa de ruta – juego ficticio

1. Equilibrio de Cournot
2. Juego ficticio para 2 jugadores
3. Ejemplos
4. Comportamiento asintótico
5. Cuestiones sobre juego ficticio con varios jugadores, etc.
6. Juego ficticio estocástico

Equilibrio de Cournot



- $\theta_{t+1} = f^C(\theta_t)$, donde
- $f^C(\theta) = (BR_1(\theta^2), BR_2(\theta^1))$.
- si $\underline{\theta}$ es un estado estable de f^C (i.e., $\underline{\theta} = f^C(\underline{\theta})$), entonces $\underline{\theta}$ es un equilibrio Nash.
- el equilibrio Nash de la izquierda es estable globalmente.



- Un estado estable θ de F es *estable* si y sólo si, $\forall$vecindario U de θ, $\exists$nbrd U_1 s.a., si $\theta_0 \in U_1$, $F_t(\theta_t) \in U$ $\forall t>0$.
- Los equilibrios Nash estables son:
- Un estado estable θ de F es *estable asintóticamente* si y sólo si, es estable y si $\theta_0 \in U$, $\lim_t F_t(\theta_t) = \theta$.
- Un estado estable q de F es *estable globalmente, si y sólo si*, es ass.stable y $U = \Theta$

Juego ficticio – 2 jugadores

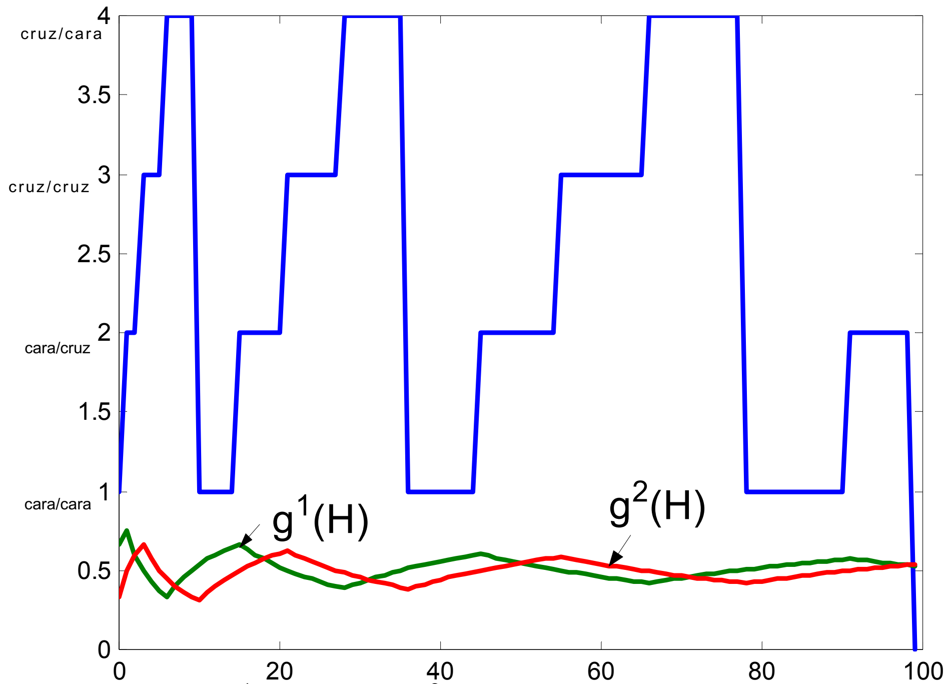
- (S^1, S^2, u^1, u^2), un juego.
- $k_0^i : S^{-i} \to R_{++}$; $k_t^i\left(s^{-i}\right) = \begin{cases} k_{t-1}^i\left(s^{-i}\right) + 1 & \text{si } s_{t-1}^{-i} \quad s^{-i} \\ k_{t-1}^i\left(s^{-i}\right) & \text{de otro modo.} \end{cases}$
- $\gamma_t^i\left(s^{-i}\right) = \dfrac{k_t^i\left(s^{-i}\right)}{\sum_{\tilde{s}^{-i}} k_t^i\left(\tilde{s}^{-i}\right)}$
- *Juego ficticio* es cualquier regla ρ_t con

$$\rho_t^i(\gamma_t^{-i}) \in BR^i(\gamma_t^{-i}).$$

Ejemplo – el juego de las monedas

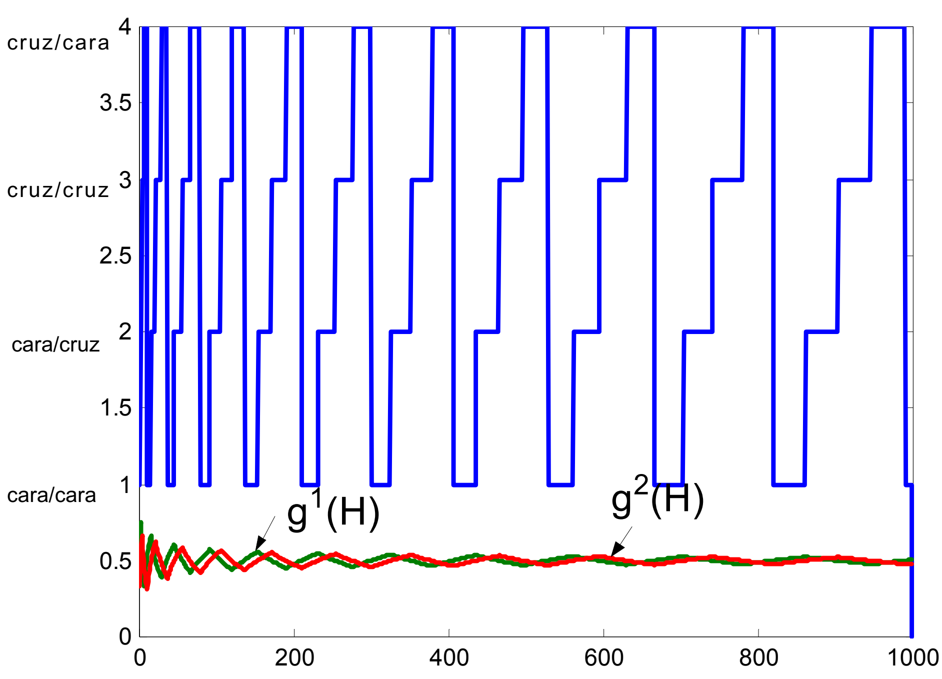
	cara	cruz
cara	(1,-1)	(-1,1)
cruz	(-1,1)	(1,-1)

Juego ficticio en el juego de las monedas

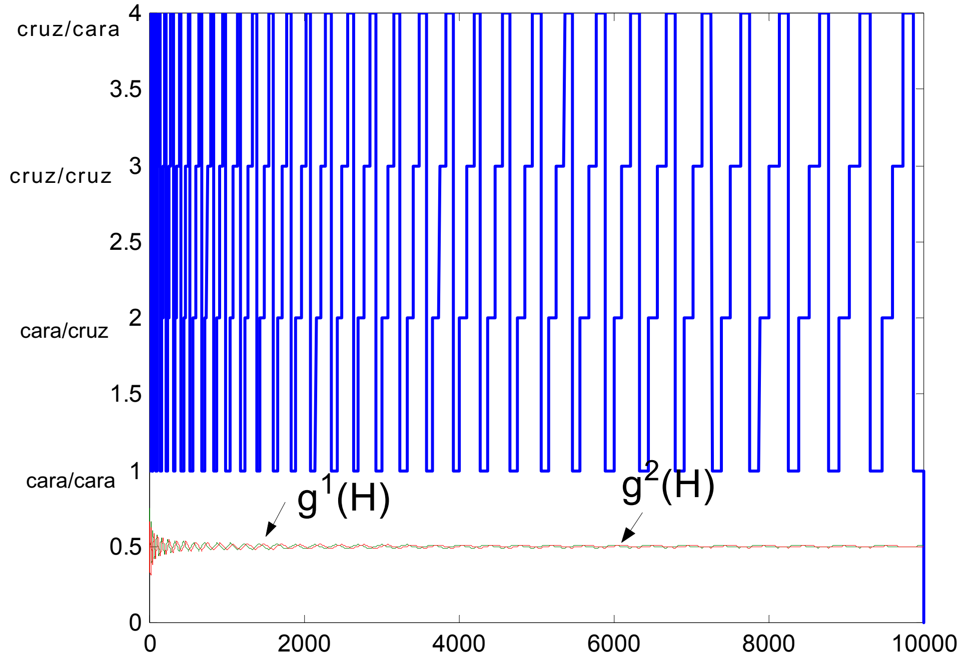


$k_0{}^1 = (2,1); k_0{}^2 = (1,2)$

Juego ficticio en el juego de las monedas 2



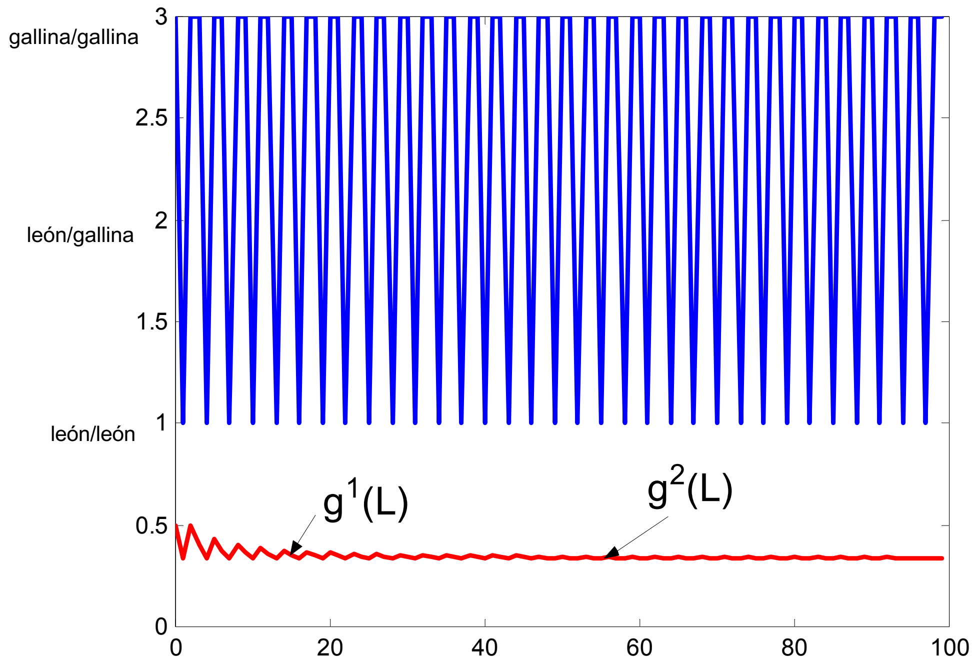
Juego ficticio en el juego de las monedas 3



Juego del gallina y del león

		
	(-1,-1)	(1,0)
	(0,1)	(1/2,1/2)

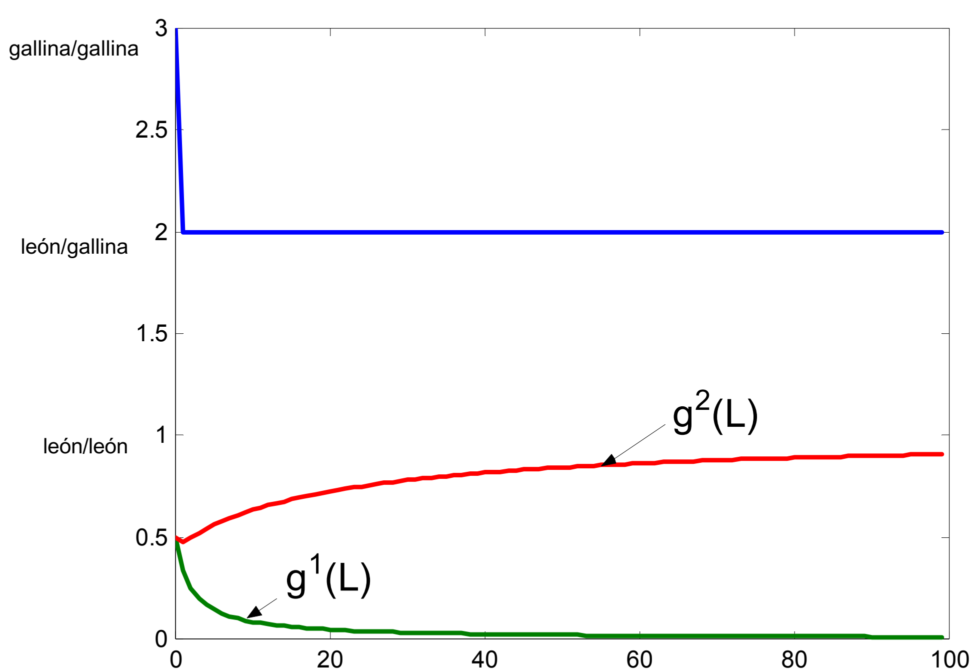
Juego ficticio en el juego del gallina



$k_1 = (1,1) = k_2$

Juego ficticio en el juego del gallina – 2

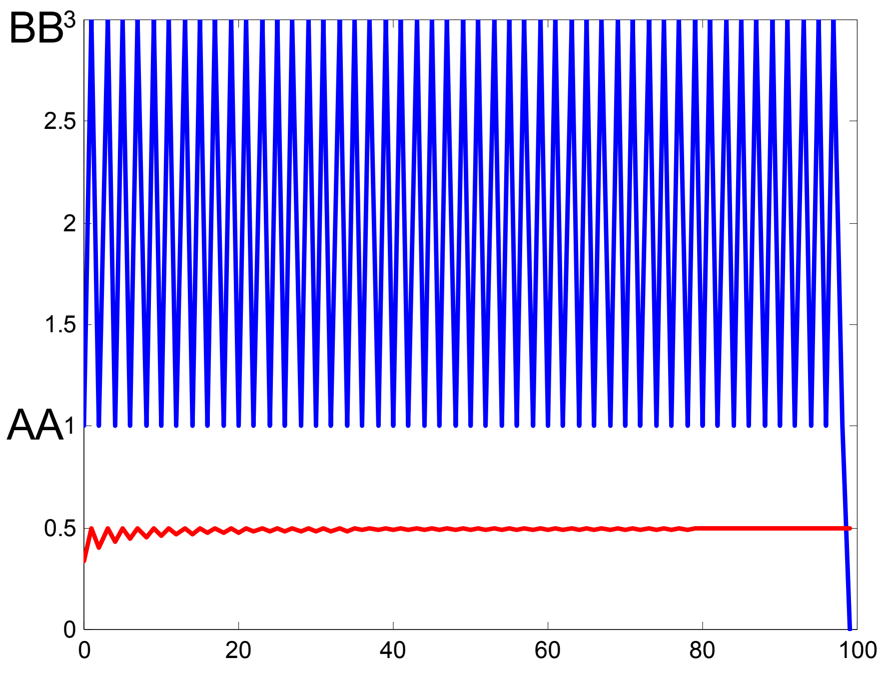
$k_0^1 = (1,1); k_0^2 = (10,10)$



El juego de la descoordinación

	A	B
A	(0,0)	(1,1)
B	(1,1)	(0,0)

Descoordinación



Comportamiento asintótico

Propuesta: (1) Si $\underline{s}$ es un equilibrio Nash estricto, y $\underline{s}$ se juega en cierto t en el proceso de juego ficticio, s se juega a partir de entonces. (2) Cualquier estado estable estratégico de juego ficticio es un equilibrio Nash.

Prueba: (1)

1. $\underline{s}^i \in BR^i(\gamma_t^i)$.
2. $\gamma^i_{t+1} = (1-a_t)\, \gamma_t^i + a_t\delta(\underline{s}^{-i})$; δ es la delta de Dirac.
3. $u^i(\underline{s}^i,\gamma^i_{t+1}) = (1-a_t)u^i(\underline{s}^i,\gamma^i_t) + a_t u^i(\underline{s}^i, \underline{s}^{-i})$.
4. $\{\underline{s}^i\} = BR^i(\gamma^i_{t+1})$.

Comportamiento asintótico, cont.

- Distribución empírica: $d_t^j (s^j) = [k_t(s^j) - k_0(s^j)]/t$

Propuesta: si las distribuciones empíricas sobre las opciones de cada jugador convergen, entonces el producto de éstas es un equilibrio Nash.

Propuesta: las distribuciones empíricas d_t^j sobre las opciones j de cada jugador convergen si la fase tiene compensaciones genéricas y es 2x2, o es de suma cero, o se resuelve por eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, o …

Ejemplo de Shapley

	L	M	R
T	0,0	1,0	0,1
M	0,1	0,0	1,0
D	1,0	0,1	0,0

(T,M) → (T,R) → (M,R) → (M,L)
→ (D,L) → (D,M) → (T,M) → …

Las distribuciones empíricas no convergen, pero en vez de eso, siguen un ciclo limitado.

Cuestiones sobre juego ficticio con varios jugadores

- ¿Ha de suponer un jugador que las estrategias de los otros jugadores son no correlacionadas?
- ¿Ha de suponer un jugador que las estrategias de los otros jugadores son correlacionadas sólo porque no sabe qué pares de estrategias independientes se juegan?

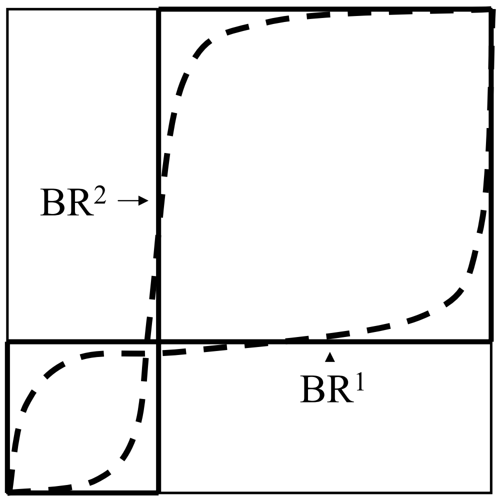
Juego ficticio estocástico
y
Equilibrio en estrategias mixtas

Compensaciones perturbadas al azar

- η_1,η_2 son iid con una distribución diferencial f_x.
- A medida que x se acerca a 0, f_x se convierte en una masa unidad en 0.

	H	T
H	$2+\eta_1, 2+\eta_2$	$\eta_1, 0$
T	$0, \eta_2$	1,1

Compensaciones perturbadas al azar



- $\underline{BR}^i(\sigma^{-i})(s^i)$
  $= \Pr\{\eta^i | \; s^i \in BR^i(\sigma^{-i}; \eta^i)\}$
- El perfil σ es una *distribución Nash* si y sólo si
  $\underline{BR}^i(\sigma^{-i}) = \sigma^i \; (\forall i)$
- *El juego ficticio estocástico* es una regla que juega una estrategia mixta en $\underline{BR}^i(\gamma_t^{-i})$.