14.126 Boletín de ejercicios 4 – Teoría de juegos

Para entregar en la clase 21

1. Tenga en cuenta el siguiente juego *Hawk-Dove* (halcón y paloma), en él las palomas también ocasionan un pequeño coste t cuando se encuentran:

	H	D
H	$(v-w)/2, (v-w)/2$	$v, 0$
D	$0, v$	$v/2-t, v/2-t$

.

   (a) Suponiendo que $w > v$ and $t > 0$ halle todas las estrategias evolucionariamente estables.

   (b) Ahora piense en un tercer tipo, B, que juega H si es el primero en llegar a un territorio y juega D (sin ocasionar el coste t) si es el segundo:

	H	D	B
H	$(v-w)/2, (v-w)/2$	$v, 0$	$3v/4-w/4, (v-w)/4$
D	$0, v$	$v/2-t, v/2-t$	$v/4-t/2, 3v/4-t/2$
B	$(v-w)/4, 3v/4-w/4$	$3v/4-t/2, v/4-t/2$	$v/2, v/2$

.

   ¿Para qué valores de v, w, y t, B es una estrategia evolucionariamente estable?

2. Sea $\underline{z} = (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n)$ el perfil de estrategia racionalizable más pequeño en un juego supermodular dado. Sea también $\underline{y}$ el equilibrio Nash más pequeño del juego que se crea fijando la estrategia del jugador 1en $\underline{z}_1$. Demuestre que:

$$\underline{z} = \underline{y}.$$

3. Tenga en cuenta el siguiente juego de ultimatum, en el que el jugador 1 ofrece algún $a \in A = \{0{,}01, 0{,}02, \ldots, 1\}$, y el jugador 2 exige algún $b \in A$. Si $a \geq b$ (esto es, si el jugador 2 acepta la oferta a), entonces el beneficio es $(1 - a, a)$; de otro modo, el beneficio es (0, 0).

   (a) Calcule todos los equilibrios de Nash.

   (b) Piense ahora en un proceso evolucionario en el que los miembros de una población se juntan por parejas para jugar un juego de ultimatum en el que cada agente tiene la misma posibilidad de desempeñar los papeles de jugador 1 y jugador 2. Suponga que el crecimiento de las estrategias en este juego de rol sigue la dinámica del replicador. Halle todas las estrategias asintóticamente estables.

4. Tenga en cuenta un duopolio lineal Cournot con la función de demanda inversa verdadera $P = a - Q$ y costes marginales cero, donde P es precio, $a > 0$, y $Q = q_1 + q_2$ es el suministro total de un producto. Ahora imagine que cada empresa $i \in N = \{1, 2\}$ percibe la función de demanda inversa como $P = a + b_i - Q$, donde $b_i \in R$ es el sesgo en la percepción de i. Sea $G (b_1, b_2)$ el juego en el que b_1 y b_2 son bien conocidos.

   (a) Demuestre que $G (b_1, b_2)$ tiene un perfil de estrategia racionalizable exclusivo. Calcule los verdaderos beneficio $u_1 (b_1, b_2)$ y $u_2 (b_1, b_2)$ en el perfil de estrategia racionalizable – calculado utilizando $P = a - Q$.

   (b) Tenga en cuenta el *meta game* $\Gamma = (N, \mathbb{R}, \mathbb{R}, u_1, u_2)$, donde las estrategias son elecciones de b_1 y b_2, y u_1 y u_2 están igual que en (a). Demuestre que Γ es supermodular en un orden adecuado, tiene un equilibrio de Nash exclusivo b^*, y que $b_i^* > 0$ para cada $i \in \boldsymbol{N}$. Demuestre que la dinámica del replicador para Γ (utilizando los verdaderos beneficios) converge en b^*.

   (c) Ahora tenga en cuenta un proceso de aprendizaje evolucionario en el que los agentes no sólo desarrollen sus percepciones (esto es, b_1 y b_2) sino que también aprendan a jugar las percepciones dadas del juego $G (b_1, b_2)$. Suponga que el proceso de aprendizaje es una dinámica del replicador de dos niveles en la que aprenden cómo jugar $G (b_1, b_2)$ mucho más rápido de lo que cambian sus percepciones, esto es, dado cualquier par de percepción (b_1, b_2), el juego converge al límite de las dinámicas para (b_1, b_2) fijo antes de que cambien sus percepciones. ¿Cuál es el límite de esta dinámica del replicador de dos niveles?

   (d) Debata los resultados brevemente.

   (e) [**Pista:** A lo largo de todo el ejercicio, suponga que se aplica el resultado de Samuelson y Zhang (esto es, Teorema 3.1 en Weibull)].