Epistemología interactiva

14.126 Teoría de juegos

Sergei Izmalkov

Muhamet Yildiz

Mapa de ruta

1. Formalización del conocimiento para una sola persona
2. Conocimiento común
   1. Entre dos individuos
   2. Entre muchos individuos
   3. Teorema del acuerdo
3. Construcción de un espacio de estado universal
4. Enfoque semántico y sintáctico
5. Teorema *No-trade*

Fundamentos básicos

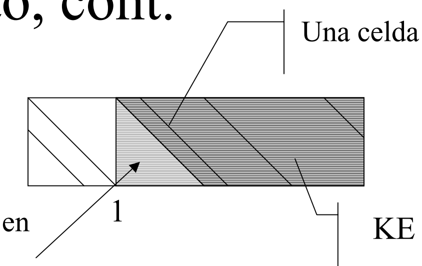
- ω = un estado, una descripción completa del mundo;
- Ω = el conjunto de todos los estados;
- E = un evento, un subconjunto de Ω;
  - $E \subseteq F$ = E implica F
  - $E \cap F$ = E y F
  - $E \cup F$ = E o F
- $\mathfrak{E}$ = el conjunto de todos los eventos

Formalizaciones equivalentes de conocimiento

- **Función de conocimiento:** κ de Ω a algún espacio; el agente conoce el valor de κ, p.ej., conoce $\kappa(\omega)$, pero no ω.
- **Función de información:** $I(\omega) = \{\omega' \in \Omega | \kappa(\omega) = \kappa(\omega')\}$
  - $\omega \in I(\omega)$;
  - Si $I(\omega) \cap I(\omega') \neq \emptyset$, entonces $I(\omega) = I(\omega')$

- p = precio del pan ($p \geq 0$);
- e = ruido ($e \in [0,1]$)
- $\omega = (p,e)$
- obtiene una señal ruidosa $\kappa = p+e$.
- $I(p,e) = \{(p',e') | p'+e' = p+e\}$

Conocimiento, cont.



- **Partición de información:**
- $\mathfrak{I} = \{I(\omega) | \omega \in \Omega\}$
- **Conocimiento u(niversal)campo:**
  $\mathfrak{K}$ = todas las posibles uniones de celda en $\mathfrak{I}$.
- **Operador de conocimiento**:
  $K : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$
- $KE = \{\omega \in \Omega | I(\omega) \subseteq E\}$
  - $KE = \cup_{F \in \mathfrak{I}, F \subseteq E} F$
  - KE es el miembro mayor de $\mathfrak{K}$ incluido en E.

- $E = \{(p,e) | \ p > 1\}$
- $I(p,e) \subseteq E$ sólo si $p + e > 2$.
- $KE = \{(p,e) | p + e > 2\}$

Operador de conocimiento

1. $KE \subseteq E$
2. $E \subseteq F$ implica $KE \subseteq KF$
3. $KE \subseteq KKE$
4. $\sim KE \subseteq K{\sim}KE$

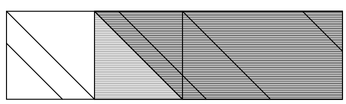
- $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$.
- $KE = KKE$;
- $\sim KE = K{\sim}KE$.
- $K\Omega = \Omega$.

1. Si conozco algo, debe ser cierto.
2. Si E implica lógicamente F, y si sé que E es cierto, entonces sé que F es verdadero.
3. Si conozco algo, sé que conozco eso.
4. Si no conozco algo, sé que no conozco eso.

¡Asociado !

Conocimiento común - CK (2 personas)

- $i = 1,2$; K_i, I_i,etc.
- $CKE := K_1E \cap K_2E \cap K_1K_2E \cap K_2K_1E \cap K_1K_2K_1E \cap K_2K_1K_2E \cap K_1K_2K_1K_2E \cap K_2K_1K_2K_1E \ldots$



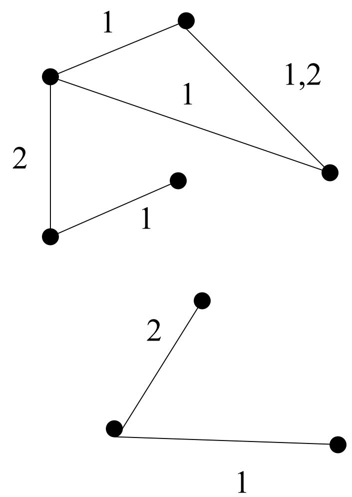
1

- $\kappa_1 = p+e$; $\kappa_2 = p$.
- $I_1(p,e) = \{(p',e') | p'+e'=p+e\}$
- $I_2(p,e) = \{(p',e') | p'=p\}$
- $E = \{(p,e) | p > 1\}$
- $K_1E = \{(p,e) | p + e > 2\}$
- $K_2E = \{(p,e) | p > 1\} = E$;
- $K_1K_2E = K_1E$
- $K_2K_1E = \{(p,e) | p > 2\}$ (why?)
- $K_1K_2K_1E = \{(p,e) | p + e > 3\}$
- $CKE =$

Teoremas sobre CK (2-personas)

1. $CKE \subseteq E$
2. $K_iCKE = CKE$
3. $E \subseteq F \Rightarrow CKE \subseteq CKF$
4. CKE es el evento más grande F con $F \subseteq E$ y $K_1F = K_2F = F$.
5. CK es un operador de conocimiento asociado con $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$.
6. $CKE = CKCKE$; $\sim CKE = CK\sim CKE$
7. $CKE\Omega = \Omega$.

Un enfoque gráfico



- Ω = todos los nodos;
- Dos nodos están en el mismo *sell* de i sólo si están conectados por un eje indicado por i;
- Partición CK = subgrafos conectados más mayores.

Espesamiento común $\mathfrak{I}_1 \wedge \mathfrak{I}_2$

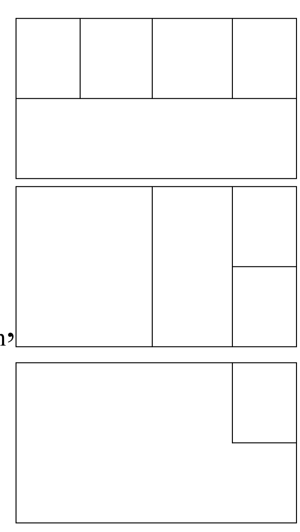
- $\mathfrak{I}_1 \wedge \mathfrak{I}_2$ es la partición más fina que es más espesa que I_1 y I_2, asociada con $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$.

$$I_{1,2}(\omega) = \bigcap_{\omega \in F \in \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2} F$$

- $I_1(\omega) \cup I_2(\omega) \subseteq I_{1,2}(\omega)$.
- $I_{1,2}(\omega)$ se puede escribir como la unión de algunas celdas en $\mathfrak{I}_1$.
- $\omega' \in I_{1,2}(\omega)$ sólo si $\exists \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$, $\exists i(0), i(1), \ldots, i(n)$ s.t. $\omega_0 = \omega$, $\omega_n = \omega'$,

  $\omega_k \in I_{i(k-1)}(\omega_{k-1})$

  para todo $k > 0$.



Conocimiento común - CK (n personas)

- $i = 1,2,\ldots,n$; K_i, I_i,etc.
- $K^1 := \cap_i K_i$;
- $K^m := (K^1)^m$;
- $CKE := \cap_m K^m$

1. $CKE \subseteq E$
2. $K_i CKE = CKE$
3. $E \subseteq F \Rightarrow CKE \subseteq CKF$
4. CK es un operador de conocimiento asociado con $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{K}_n$.
5. CKE es el mayor evento F con $F \subseteq E$ y $K_1F = K_2F = \ldots = K_nF = F$.
6. $CKE = CKCKE$; $\sim CKE = CK\sim CKE$
7. $CKE\Omega = \Omega$.

Espesamiento común – igual

- $\mathfrak{I}_1 \wedge \mathfrak{I}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{I}_n$ es la partición más fina que es más espesa que todo $\mathfrak{I}_1 \ldots \mathfrak{I}_n$, asociado con $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{K}_n$.

$$I_{1,\ldots,n}(\omega) = \bigcap_{\omega \in F \in \mathfrak{K}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{K}_n} F$$

- $I_{1,\ldots,n}(\omega)$ se puede escribir como la unión de algunas celdas en $\mathfrak{I}_1$.
- $\omega' \in I_{1,\ldots,n}(\omega)$ sólo si $\exists \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$, $\exists i(0), i(1), \ldots, i(n)$ s.a. $\omega_0 = \omega$, $\omega_n = \omega'$,

$$\omega_k \in I_{i(k-1)}(\omega_{k-1})$$

para todo $k > 0$.

Teorema del acuerdo

- B = un conjunto finito de decisiones b;
- d : E \ {∅} → B, una regla de decisión;
- d satisface el principio de cosa cierta: si $E = \cup_a J_a$ donde $\{J_a\}$ es una familia de conjuntos disconexos, y si $d(J_a) = b$ en cada a, entonces d(E) = b.

Teorema: Por cada i, defina $d_i \Omega \to B$ por $d_i(\omega)=d(I_i(\omega))$. Entonces,

$$CK(d_1=b) \cap CK(d_2=c) \neq \emptyset \Rightarrow b = c.$$

Prueba: suponga: $\omega \in E := CK(d_1=b) \cap CK(d_2=c)$.

1. $\exists\{J_a\} \subseteq \mathfrak{I}_1$ s.a. $E = \cup_a J_{a.}$
2. $d(J_a) = b$ por cada a.
3. d(E) = b.

Aplicación – acordando discrepar

- A = un evento fijo
- B = [0,1]
- d(E) = P(A|E), probabilidad condicional con respecto a un común anterior P dado E.
- Regla de Bayes => d satisface el principio de cosa cierta.
- Teorema del acuerdo => si todo el mundo sabe en w que $P(A|I_1(\omega)) = b$ y $P(A|I_2(\omega)) = b$, entonces b = c.

Teorema *No-trade*

- $\omega = (x,z)$; $z = (z_1,\ldots,z_n)$, i observa z_i, posee $e_i(x)$.
- $y : \Omega \to B$, $y \in Y$.
- $u_i(y_i(\omega);x) := \underline{u}_i(y_i(\omega) + e_i(x);x)$.

Lema: suponga que y es Pareto-optimal, e y' y $A \subseteq \Omega$ están s.a. $E[u_i(y_i'(\omega);x)|A] \geq E[u_i(y_i(\omega);x)|A]$ y $Prob(A) > 0$. Entonces, $E[u_i(y_i'(\omega);x)|A] = E[u_i(y_i(\omega);x)|A]$. Si cada u_i es estrictamente cóncavo, entonces y' = y en A.

Prueba: defina y* = [y' en A; y en ~A]. Aplique el principio de cosa cierta. Entonces, $E[u_i(y_i{}^*(\omega);x)] \geq E[u_i(y_i(\omega);x)]$. Si $E[u_i(y_i'(\omega);x)|A] > E[u_i(y_i(\omega);x)|A]$, entonces $E[u_i(y_i{}^*(\omega);x)] > E[u_i(y_i(\omega);x)]$.

Teorema *No-trade*

Teorema: suponga que $\underline{y} = 0$ es Pareto-óptimo, y $Prob(I_{1,\ldots,n}(\omega)) > 0$. Si es bien sabido en ω que y es factible y que cada i apenas prefiere y a $\underline{y}$, entonces cada una es indiferente entre y e $\underline{y}$. Si cada agente es estrictamente averso al riesgo, entonces $y = \underline{y}$

Prueba: tome $A = I_{1,\ldots,n}(\omega)$ en el lema.

Un ejemplo de equilibrio

- $\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$.
- 2 jugadores, i = 1,2
- $I_1 = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\}\}$;
- $I_2 = \{\omega_1,\omega_2\}$;

- Activo 1 da
  - \$–1 en ω_2.
  - \$10 en ω_1 y
- Activo 2 da
  - \$–1 en ω_1, y
  - \$1 en ω_2.

Espacio de estado universal

- X = un alfabeto de letras x, y, z, …
- Fórmulas: cadenas finitas de símbolos s.a.
  - Cáda letra es una fórmula;
  - Si f y g son fórmulas, también (f)OR(g);
  - Si f es una fórmula, también NOT(f) y k_i.
- Una *lista* L (de fórmulas) está *cerrada lógicamente* si y sólo si
  $[f\in L$ & $(f \Rightarrow g)\in L] \Rightarrow g\in L$;
- *Cerrada epistemológicamente* si y sólo si
  $f \in L \Rightarrow k_i f \in L$.

- Un estado ω es cualquier lista cerrada lógicamente s.a.
  - $f\in \omega \Leftrightarrow \text{NOT}(f)\notin \omega$;
  - ω incluye todas las "tautologías."
- Ω = el conjunto de todos los estados.
- $\kappa_i(w) = \{k_i(f) | k_i(f) \in \omega\}$

Tautologías

El conjunto de tautologías es la lista cerrada más pequeña desde el punto de vista lógico y epistémico que contiene todo:

- (f OR f) => f
- f => (f OR g)
- (f OR g) => (g OR f)
- (f => g) => ((h OR f) => (h OR g))
- k_i(f) => f
- (k_i(f=>g)) => (k_i(f)=>k_i(g))
- k_i(f) => k_i(k_i(f))
- NOT(k_i(f)) => k_i(NOT(k_i(f)))

Algunos teoremas

- $E_f := \{\omega \in \Omega | f \in \omega\}$
- $\sim E_f = E_{NOT(f)}$
- $E_f \cup E_g = E_{(f\ OR\ g)}$
- $E_f \cap E_g = E_{(f\ \&\ g)}$
- $K_i E_f = E_{ki(f)}$
- $E_f \subseteq E_g \Leftrightarrow$ [f => g es una tautología]