14.126 Boletín de ejercicios 3 – Teoría de juegos

Para entregar en la clase 17

1. Dado un evento finito E y dos agentes 1 y 2, demuestre que existe algún entero $\overline{n}$ tal que para cualquier cadena $i_0 \neq i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_{n-1} \neq i_n$ con $n \geq \overline{n}$, el evento:

$$F = K_{i_0} K_{i_1} K_{i_2} \cdots K_{i_{n-1}} K_{i_n} E$$

es un evento público entre 1 y 2, por ejemplo, $CK_{1,2}F = F$.

2. Existen tres jugadores, 1, 2 y 3, y tres estados, a, b, y c. Las particiones de información de los jugadores 1, 2 y 3 son $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, y $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, respectivamente. Hay una variable (aleatoria) v tal que $v(a) = v(b) = -1$, y $v(c) = 2$. ¿Es sabido en el estado a que v es -1? Suponga que los jugadores tienen un previo común, según el cual cada estado es igualmente probable. Con esta estructura de información, los jugadores juegan el siguiente juego. En primer lugar, 1 elige entre Izquierda y Derecha. Si escoge Izquierda, el juego termina y obtiene el vector de beneficio (1,1,1). Si escoge Derecha, entonces 2 ha de elegir entre Izquierda y Derecha. Si 2 elige Derecha, el juego termina y obtiene el vector de beneficio (0,2,0). Si 2 escoge Derecha, entonces 3 ha de elegir entre Izquierda y Derecha, finalizando el juego. Si 3 escoge Izquierda, el vector de beneficio es $(2, 0, v)$; si elige Derecha el vector de beneficio es (3,3,0). Describa todos los equilibrios secuenciales en estrategias puras.

3. Considere un duopolio de Cournot donde la función de demanda inversa viene dada por

$$P = 1 - Q$$

donde P es el precio de un artículo y $Q = q_1 + q_2$ donde q_1 es el suministro de la empresa $i \in N = \{1, 2\}$. El coste marginal de la empresa i está indicado por c_i, por lo que su función de beneficio es:

$$u_i(q_1, q_2) = q_i(1 - q_1 - q_2 - c_i).$$

La demanda inversa y las funciones de beneficios son sabidas. El coste marginal sólo lo conocen las empresas. Construya una jerarquía infinita general de creencias sobre los costes marginales, tal que las creencias de un jugador sean independientes de las de otro jugador y de sus propias creencias . Escriba t_i para el tipo genérico de jugador i.

(a) Defina una estrategia

(b) Defina un equilibrio Nash. Para el resto de la pregunta fije un equilibrio Nash q^* de este juego.

(c) Para cada i y t_i, escriba la condición de primer orden que $q_i^*(t_i)$ debe satisfacer. (Asegúrese de que $q_i^*(t_i)$ se escribe en función de c_i y la expectativa de q_j^* de acuerdo con i).

(d) Ahora reconozca que q_j^* ha de satisfacer una ecuación similar. Sustituyendo la anterior con ésta, escriba $q_i^*(t_i)$ en términos de c_i , la expectativa de i de c_j y la expectativa de i de la expectativa de j de q_i^*.

(e) Generalice el procedimiento anterior, calcule $q_i^*(t_i)$ (en términos de los costes y las expectativas de orden más alto sobre esos costes).

(f) ¿Cómo puede extender esto a todos los juegos de dos personas con funciones de utilidad cuadrática, donde $u_i(s_i, s_j, a_i) = -(s_i - a_i - b_i s_j)^2$ para algunos números reales a_i y b_i, donde b_i es sabido por todos. ¿Qué pasa si el equilibrio es inestable?

4. Para dos jugadores, halle (i) una función de utilidad común u para alguna incertidumbre subyacente θ y (ii) un modelo de información incompleta, tal que sea sabido por todos que (1) los jugadores son racionales y (2) juegan estrategias diferentes. [Aquí si un jugador juega x, obtiene $u(x, \theta)$.