Aprendizaje 3:

Dinámica del replicador (RD) y ajuste con ruido persistente

Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

Mapa de ruta

1. Definición
2. Comportamiento asintótico de la dinámica del replicador
   (a) RD frente a racionalizabilidad
   (b) RD frente a ESS
   (c) RD frente a equilibrio perfecto
3. Generalización de RD
4. Bases del aprendizaje de la RD
   (a) Aprendizaje social
   (b) Respuesta al estímulo
5. Modelos de ajuste con aleatoriedad persistente

1 Anotación

- G = (S, A) es un juego simétrico de 2 jugadores donde

- S es el espacio estratégico;

- $A_{i,j} = u_1(s_i, s_j) = u_2(s_j, s_i);$

- $x, y \in \Delta$ son estrategias mixtas $u(x, y) = x^T Ay;$

- $u(ax + (1-a)y, z) = au(x, z) + (1-a)u(y, z).$

2 ESS (estrategia evolutivamente estable)

Definición: se dice que una estrategia (mixta) x es evolutivamente estable sólo si, en cualquier $y \neq x$

$\epsilon_y > 0$ s.a.

$$u(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1-\varepsilon)x +$$

por cada ε en (0, ϵ_y)

Hecho: x es evolutivamente estable sólo si $\forall y \neq x,$

1. $u(x, x) \geq u(y, x),$ **y**
2. $u(x, x) = u(y, x) \Longrightarrow u(x, y) > u(y, y).$

3 Dinámica del replicador (RD)

- $p_i(t) = \#$ **personas que juegan** s_i **en** t

- $p_{(t)} =$ **población total en** t**.**

- $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)};\ x(t) = (x_1(t), \dots x_k(t))\,.$

- $$\dot{x}_i = [u(s_i, x) - u(x, x)]\, x_i = u(s_i - x, x) x_i.$$

4 RD en el juego de piedra, papel y tijera

	piedra	tijera	papel
piedra	1,1	2+a,0	0,2+a
tij.	0,2+a	1,1	2+a,0
pa.	2+a,0	0,2+a	1,1

- **Equilibrio Nash único (**s^*, s^***), donde** $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$

- **Defina** $h(x) = \log(x_1 x_2 x_3).$

- $$\dot{h}(x) = \frac{a}{2}\left(3\,\|x\|^2 - 1\right).$$

- $\min_x \|x\| = 1,\ \arg\min = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$

4.1 Dinámicas

Tres escenarios:

1. **$a = 0$ - RSP original; todas las trayectorias son ciclos.**

2. **$a < 0 - x^*$ es inestable.**

3. **$a > 0 - x^*$ es estable.**

5 Racionalizabilidad

- $\xi(t, x_0)$ **es la solución a la dinámica del replicador que empieza en x_0**

Teorema: si una estrategia pura i es estrictamente dominada (por y), entonces $\lim_t \xi_i(t, x_0) = 0$ **para cualquier x_0 interior**

Prueba: defina $v_i(x) = \log(x_i) - \sum_j y_j \log(x_j)$. **Entonces**

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(x(t))}{dt} &= \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \sum_j y_j \frac{\dot{x}_j}{x_j} \\ &= u(s_i - x, x) - \sum_j y_j u(s_j - x, x) \\ &= u(s_i - y, x) \le -\epsilon < 0. \end{aligned}$$

de ahí, $v_i(\xi(t, x_0)) \to -\infty$, so $\xi_i(t, x_0) \to 0$.

Teorema: si i no es racionalizable, entonces $\lim_t \xi_i(t, x_0) =$ **0 para cualquier x_0 interior.**

6 Teoremas

Teorema: todo ESS x es un estado estacionario asintóticamente estable de la dinámica del replicador.

(Si los individuos pueden heredar las estrategias mixtas, la conversa es también cierta.)

Prueba: Defina $C = supp(x)$, $Q = \{y | C \subset supp(y)\}$, $H(y) = \sum_{i \in C} x_i \log(y_i)$.

1. **x es un máximo local de H, y**

2. **$\exists$ una vecindad $n(x)$ s.a. H aumenta a lo largo de cualquier trayectoria en $Q \cap n(x)$.**

$$\dot{H} = \sum_{i \in C} x_i \frac{\dot{y}_i}{y_i} = \sum_{i \in C} x_i u(s_i - y, y) = u(x - y, y) > 0.$$

NE $\rightarrow$ estado estacionario en RD;

Estable SS en RD $\rightarrow$ NE.

Teorema: si x es un estado estacionario asintóticamente estable de la dinámica del replicador, entonces (x, x) es un equilibrio de Nash perfecto.

Prueba:

1. **(x, x) es un equilibrio Nash.**
   (a) **x es estable** $=> \dot{x}_i = u(s_i - x, x)x_i = 0.$
   (b) **Suponga $(x, x) \notin NE$.**
   (c) $\exists i \notin supp(x) : u(s_i - x, x) > 0.$ **[por 1 y 2]**
   (d) $\exists \delta > 0,\ n(x) : u(s_i - y, y) > \delta\ \forall y \in n(x).$
   (e) $\xi_i(t, y^0) > y_i^0 e^{\delta t}$ if $\xi_i(\cdot, y^0)$ **permaneció en $n(x)$**

2. **x no es débilmente dominada (desde ASS).**

7 Estabilidad asintótica sin ESS

	L	M	R
L	0,0	1,-2	1,1
M	-2,1	0,0	4,1
R	1,1	1,4	0,0

- $NE = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$ mutante $= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$
- RD es estable asintóticamente.
- Nota: si se pueden heredar estrategias mixtas, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ se convierte en inestable.

8 Dinámicas generales

Definición: un proceso es monótono de pago si y sólo si, en cada x interior,

$$u(s_i, x) > u(s_j, x) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}_i}{x_i} > \frac{\dot{x}_j}{x_j}.$$

Teorema: bajo cualquier dinámica monótona de pago ordinaria, si la estrategia i es eliminada por el proceso de dominancia estricta de estrategia pura iterada, entonces $\lim_t x_i(t) = 0$.

9 Aprendizaje social

- **Pregunte a los demás; si la otra persona lo hace mejor, adopte su estrategia.**

Dinámica de emulación ("medio-en aumento"):

El jugador 2 es *dummy*, $p(L) = \frac{1}{3}$.

	L	R
U	9,0	0,0
D	2,0	2,0

- **Pregunte; si el otro consigue** u' **y usted** u, **entonces cambie a probabilidad** $\max\{0, b(u\prime - u)\}$.

- **Niveles de aspiración.**

10 Respuesta de estímulo

- $u(x, y) \in [0, 1]$

- $x_i^k(t+1) = (1 - \gamma u(s^k(t), \cdot))x_i^k(t) + F(s^k(t), i)\gamma u(s^k(t), \cdot)$, **donde**

$F(s^k(t), i) = 1$ if $s^k(t) = i$,

$F(s^k(t), i) = 0$ **de otro modo.**

- **Resultado: A medida que** γ **va hacia 0, las trayectorias convergen en la trayectoria de la RD.**