Aprendizaje 5:

Ajuste con ruido persistente

(Kandori, Mailath, Rob)

Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

1 Proceso de ajuste

1.1 Juego

- N - tamaño de la población.
- Juego simétrico de 2 × 2. (A, B) - acciones.
- Suponga que hay 3 equilibrios Nash (NE):

  $(A, A);\ (B, B);\ (\alpha^* A+(1-\alpha^*)B, \alpha^* A+(1-\alpha^*)B).$

- Suponga que $\alpha^* < \frac{1}{2} \Rightarrow (A, A) -$ NE dominante riesgo

	A	B
A	2,2	0,0
B	0,0	1,1

Aquí $\alpha^* = \frac{1}{3}$.

1.2 Espacio de estado

- $\theta_t \in \Theta = [0, \ldots, N]$ – $\#$ **de jugadores que usan** A.

- **Denota**

$$u_A(\theta_t) = \frac{\theta_t}{N} u(A,A) + \frac{N-\theta_t}{N} u(A,B); \;\; u_B(\theta_t) = \ldots.$$

1.3 Proceso determinístico

- **Dinámica "Darwiniana":** $\theta_{t+1} = P(\theta_t)$, **donde**

$$sgn(P(\theta_t) - \theta_t) = sgn(u_A(\theta_t) - u_B(\theta_t)).$$

- **Ex^0: dinámica de la mejor respuesta:**

$$\theta_{t+1} = BR(\theta_t) = \begin{cases} N, & \text{for } u_A(\theta_t) > u_B(\theta_t), \\ \theta_t, & \text{for } u_A(\theta_t) = u_B(\theta_t), \\ 0, & \text{for } u_A(\theta_t) < u_B(\theta_t). \end{cases}$$

1.4 Ruido

- **2ε − probabilidad de que un jugador "mute" (sea sustituido) (*tras su elección deseada), independiente entre jugadores.**

- **Nota: incluso si sólo 1 jugador se ajusta "conscientemente" cada vez, existe una probabilidad positiva de que toda la población mute de inmediato.**

- **Claramente P^{ε} es ergódico**

1.5 Limitación de la distribución (en Ex^0)

- N^* es $\arg\min_m (m > N\alpha^*)$;
- $BR(\theta_t \geq N^*) = A$;
- $D_A = \{\theta \geq N^*\}$, $D_B = \{\theta < N^*\}$.
- **Sólo interesan los depósitos de atracción: el juego intencional depende de en cuál de los dos estados está θ_t y no del propio θ_t**

2 Resultado

Propuesta: Si N es lo bastante grande para que $N^* < \frac{N}{2}$ entonces el límite φ^* de las distribuciones invariantes pone una masa de punto sobre $\theta_t = N$, correspondiente a todos los jugadores que jueguen A.

Prueba:

1. **Para cualquier $\theta_t \in D_A (\in D_B)$ la distribución de probabilidad $P^\varepsilon(\theta_t)$ es la misma – el problema puede ser reducido a dos estados-**

2. **Defina**

$$q_{BA} = \Pr(\theta_{t+1} \in D_B | \theta_t \in D_A);$$
$$q_{AB} = \Pr(\theta_{t+1} \in D_A | \theta_t \in D_B).$$

3. Resuelva

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - q_{AB} & q_{AB} \\ q_{BA} & 1 - q_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

y halle

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{q_{BA}}{q_{AB}}.$$

4. Tome $\lim_{\varepsilon \to 0}$ of $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$.

Para cambiar $A \to B$, se necesitan al menos $N - N^*$ mutaciones en B; para $B \to A$ deben suceder al menos N^* mutaciones:

$$\begin{aligned} q_{BA} &\approx \binom{N}{N^*} \varepsilon^{N-N^*} (1-\varepsilon)^{N^*}; \\ q_{AB} &\approx \binom{N}{N^*} \varepsilon^{N^*} (1-\varepsilon)^{N-N^*}. \end{aligned}$$

Así $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \to 0$ **como** $\varepsilon \to 0$.

3 Resumen

- **Selección de equilibrio dominante riesgo como el único estado estacionario a largo plazo en los juegos de 2 × 2 (casi todos los modelos).**

- **Los procesos de "aprendizaje" tienden a seleccionar equilibrios que son relativamente resistentes a las mutaciones – diferentes de la eficiencia de Pareto.**

	A	B
A	2,2	$-a$,0
B	0,-a	1,1

(B, B) es dominante riesgo si 1 + a > 2.

- **Lo importante son las probabilidades (ratios de ellas) de escapar a los depósitos de atracción.**

4 Interacción local (Ellison)

- **Si el sistema empieza cerca del equilibrio "incorrecto" el tiempo de ajuste esperado puede ser bastante largo.**

  En el modelo KMR: la probabilidad de escape es $\approx \varepsilon^{N^*}$.

- **Objetivo: explicar por qué los procesos de ajuste estocástico podrían seleccionar el equilibrio dominante riesgo en un marco temporal relevante económicamente.**

- **Jugadores ubicados sobre el círculo y sólo interactúan con vecinos.**

- **El jugador selecciona una acción y se empareja al azar con uno de los dos vecinos.**

- **Observación: un par de A adyacentes ganan la población.**

4.1 Proceso de ajuste

1. **Juego simétrico de 2 × 2. (A, B) - acciones.**

2. $\Theta = \{A, B\}^N$.

3. **Proceso determinístico: jugador con A cambia sus vecinos a A.**

   Estados estacionarios: "Todo A", "All B", ciclo "$ABAB$ . . . - $BABA$ . . .".

4. **Ruido: probabilidad 2ε de mutación.**

5. **Limitación de la distribución: "Todo** A**",**

   Convergencia: coste mínimo de transición "todo B" es 2 si N es par y es 1 si N es impar (número de mutaciones que lleva cambiar a "todo A".)