Soluciones no cooperativas

MIT 14.126 - Teoría del juego

Sergei Izmalkov
Muhamet Yildiz

Gracias a Paul Milgrom)

1

Soluciones no cooperativas

Definiciones

2

Juegos en forma normal

- Un juego en forma normal es una triple (**N**,S,u)
  - **N**={1,…,N} es el (no-vacío) conjunto de jugadores
  - $S=S_1\times\ldots\times S_N$ es el conjunto de perfiles de estrategia
    - Una estrategia mixta para n es una prob. de distribuc. π_n en S_n, esto es, $\pi_n\in\Delta(S_n)$.
  - $u:S\rightarrow R^N$ es el vector de pagos.
    - Defina $u(\pi)=\sum\ldots\sum u(s_1,\ldots,s_N)\pi_1(s_1)\ldots\pi_N(s_N)$.
- El pago del jugador n es $u_n(\pi)$.
- Las estrategias pueden ser correlacionadas: $u(\pi)=\sum_s u(s)\pi(s)$

3

¿Estrategias mixtas?

- Interpretaciones de equilibrios mixtos
  - ¿Engaño?
    - Un consenso informal contempla el "engaño" como equilibrios agrupados en juegos de información incompleta
  - Incertidumbre en otras mentes
  - Proporciones de población
  - Harsanyi: aproximación conductual al equilibrio estratégico puro en juegos con perturbaciones de pago aleatorias

4

Motivos para la correlación

- El juego de las personas se puede correlacionar objetivamente por razones externas al juego:
  - Pueden observar una variable común, como el tiempo.
  - Pueden tener una cultura común que les predispone a tener inclinaciones comunes, desconocidas para el observador externo, que aparecen como correlaciones en el comportamiento.
- El juego también se puede correlacionar subjetivamente.
  - Tal vez el observador esté aprendiendo un aspecto desconocido del comportamiento humano.
  - Quizá el observador sepa que cada tribu tiene un jefe sin saber quién es. Entonces, un comportamiento de "jefe" por parte de un jugador hace menos probable que otros lo exhiban.

5

Soluciones no cooperativas

Dominancia & racionalizabilidad

6

Racionalidad bayesiana

- Un jugador racional (bayesiano)
  - tiene creencias sobre las posibilidades de juego de su rival
  - optimiza de acuerdo con esas creencias
- Teorema. Una estrategia del jugador n es *la mejor respuesta* a *cierta* distribución de probabilidad del juego de su rival si y sólo si *no está estrictamente dominada* por una estrategia mixta o pura del jugador n.

7

Prueba

- Si s_n está estrictamente dominada por s_n', entonces s_n' es mejor respuesta a una distribución de probabilidad sobre otras estrategias.
- Suponga que s_n no está estrictamente dominada. Sea K el número de perfiles en S_{-n}. enotnces los siguientes dos subconjuntos convexos de R^K son inconexos:
  - A=Cápsula convexa$\{(u_n(s_n',s_{-n});s_{-n}\in S_{-n})|s_n'\in S_n\}$
  - $B=\{z\in R^K|z>u_n(s_n,\cdot)\}$
- Al separar el teorema hiperplano, existe un vector no-cero p tal que $p\cdot y\geq p\cdot z$ para todo $z\in A$, $y\in B$. Mediante inspección, p es no-negativo y puede normalizarse al vector de probabilidad requerido.
- Como $y^*=u_n(s_n,\cdot)$ está en el límite de B, $p.y^*\geq p\cdot z$ para todo $z\in A$. **QED**

8

Equilibrio de estrategia dominante

- Asuma que para cada n hay una estrategia s_n^* que domina estrictamente las otras estrategias de n.

Teorema: si todos los jugadores son racionales, entonces s^* se jugará.

- Asuma que para cada n hay una estrategia s_n^{**} que domina débilmente las otras estrategias de n.

Teorema: si todos los jugadores son racionales y prudentes, entonces s^{**} se jugará.

9

Racionalizabilidad

- Definición. Una estrategia s_j para el jugador j es *racionalizable* si hay una colección de conjuntos $\{Z_n\}$ tal que $s_j \in Z_j$ y para todos los jugadores n,
  - $Z_n \subseteq S_n$
  - Para todo $s_n \in Z_n$, s_n es una buena respuesta a cierta p_n creencia p_n cuyo apoyo es un subconjunto de Z_{-n}.
- Observe que
  - todos los elementos de cada Z_n son racionalizables.
  - La unión de todos los Z_n es el conjunto de estrategias racionalizables para el jugador n.

10

Iteración hacia la racionalizabilidad

- Primer paso
  - Cada jugador es (bayesiano) "racional" . Por tanto, cada uno juega sólo estrategias que no están estrictamente dominadas.
  - Cree una nueva forma de estrategia eliminando las estrategias dominadas del juego original.
- Iteración n+1
  - Cada jugador sabe que otros sólo jugarán las estrategias que resten de la iteración n. Los jugadores racionales eligen la mejor respuesta, esto es, una estrategia que no está estrictamente dominada en el nuevo juego.
  - Cree la forma estratégica n+1 eliminando las estrategias dominadas de la forma estratégica n.
- Si el juego original es finito, al final no se realizan cambios.

11

Dominancia estricta iterada y racionalizabilidad

- Teorema. Cuando el proceso iterativo termina, las estrategias restantes de cada jugador n son precisamente las estrategias racionalizables de n.
- Prueba
  - Cada fase elimina sólo estrategias que no son racionalizables.
  - Las estrategias restantes son necesariamente racionalizables.

12

Comprobación de racionalidad y racionalizabilidad

Teorema (Bernheim, Pearce): Asuma que los pagos y la racionalidad son bien conocidos. Entonces, cada jugador debe jugar una estrategia razonable.
Es más, dado cualquier perfil de estrategia racionalizable s, existe una jerarquía de de creencias en la que se juega s.

13

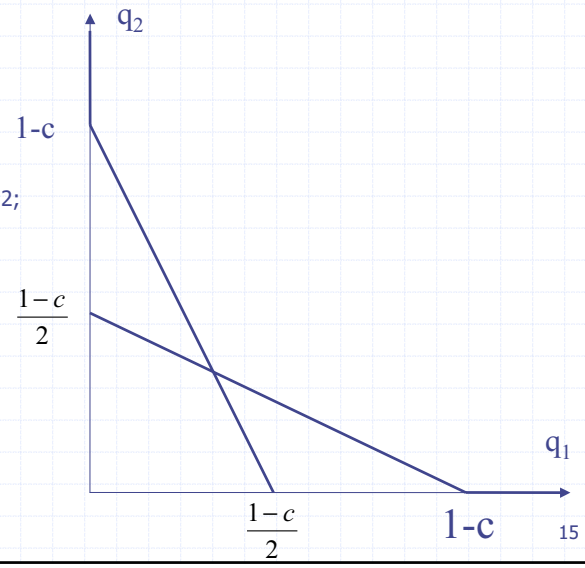
Eq. de Nash y racionalizabilidad

- Todo equilibrio de Nash es racionalizable.
- Teorema (Milgrom y Roberts): Asuma un juego supermodular en una retícula completa. Entonces, existe el equilibrio Nash más grande y más pequeño, x e y, respectivamente. Si z es racionalizable, entonces $x \leqq z \leqq y$.
- Corolario: Si un juego supermodular tiene un equilibrio de Nash único, entonces tiene una estrategia racionalizable única.

14

Racionalizabilidad en el duopolio lineal de Cournot

- $P = 1 - q_1 - q_2$;
- $c_1 = c_2 = c$



Ejemplo (robustez)

	L	R
T	2,1.001	1001,1
B	1,1	1000,1000

Soluciones no cooperativas

Equilibrio de Nash y teoremas de su existencia

17

Equilibrio de Nash

- Un juego en forma normal es una triple (**N**,S,u)
  - **N**={1,…,N} es el conjunto (no-vacío) de jugadores
  - $S=S_1\times\ldots\times S_N$ es el conjunto de perfiles de estrategia
    - Una estrategia mixta para n es una prob. de distribución π_n sobre S_n, esto es, $\pi_n\in\Delta(S_n)$.
  - $u:S\rightarrow R^N$ es el vector de pago.
    - Defina $u(\pi)=\sum\ldots\sum u(s_1,\ldots,s_N)\pi_1(s_1)\ldots\pi_N(s_N)$.
- Equilibrio: un perfil de estrategia mixto $\pi\in\Pi$ es un equilibrio Nash si

$$(\forall n\in\mathbf{N})(\forall\pi'_n\in\Delta(S_n))u_n(\pi)\geq u_n(\pi'_n,\pi_{-n})$$

18

Condiciones epistémicas para el E.N.

Teorema (Aumann & Brandenburger): en un juego de 2 personas, asuma que las funciones de pago, la racionalidad de los jugadores y sus conjeturas son conocidas mutuamente. Entonces, las conjeturas constituyen un equilibrio de Nash.

Para n>2 jugadores, necesitamos una suposición previa común y un conocimiento común de las conjeturas.

19

Existencia del equilibrio de Nash

- Teorema (Nash). Suponga que el número de jugadores y los conjuntos de estrategia son finitos. Entonces, existe un equilibro de Nash.
- Prueba. Sea Δ el conjunto de perfiles de estrategia mixta y considere el mapa $f:\Delta \rightarrow \Delta$ dado como sigue. $f_n(\pi)$ es la distribución de probabilidad sobre S_n que asigna a cualquier estrategia s_n la probabilidad:

$$f_n(\pi)(s_n) = \frac{\max\left(0, \pi_n(s_n) + u_n(s_n, \pi_{-n}) - u_n(\pi)\right)}{\sum_{s'_n \in S_n} \max\left(0, \pi_n(s'_n) + u_n(s'_n, \pi_{-n}) - u_n(\pi)\right)}$$

20

Prueba, continuación

- Como esta función es continua y Δ es convexo y compacto, f tiene un punto fijo.
- Por inspección, el punto fijo tiene las propiedades que
  - cada una las estrategias de n que se juegan con probabilidad cero tiene un beneficio esperado no mayor que $u_n(\pi)$.
  - cada una de las estrategias puras de n que se juega con probabilidad positiva tiene el mismo beneficio esperado.
- Por tanto, el punto fijo es un equilibrio de Nash. **QED**

21

Funciones de pago cóncavas

- <u>Teorema</u>. Sean $S_1,\ldots,S_N$ subconjuntos convexos y compactos de un espacio euclídeo. Suponga que para todo n, $u_n:S\rightarrow R$ es continuo y que para todol s_{-n}, $U(s_n)=u_n(s_n,s_{-n})$ es cóncavo. Entonces, existe un perfil de estrategia de equilibrio de Nash $s\in S$.
- Notas:
  - Aparentemente, este es un teorema de la existencia de un equilibrio de Nash de estrategia pura.
  - Dado cualquier juego finito, el juego correspondiente en estrategias mixtas es lineal en las estrategias y por tanto satisface la hipótesis mencionada.

22

Prueba

- Considere la correspondencia "mejor respuesta" f:S→S, dada por:

$$f_n(s) = \arg\max u_n(\ , s_{-n})$$
$$= \{ s''_n \in S_n \mid (\forall s'_n \in S_n) u_n(s''_n, s_{-n}) \geq u_n(s'_n, s_{-n}) \}$$

- Observe (sig. diapo.) que f tiene una "curva cerrada" y es de valor convexo.
- Se aplica el teorema del punto fijo de Kakutani (al igual que varios otros). Por construcción, un punto fijo es un equilibrio de Nash. **QED**

23

Detalles

- <u>El teorema del punto fijo de Kakutani</u>
  - Sea Δ un subconjunto compacto y convexo de R^N y sea $f:\Delta \rightarrow \Delta$ una multifunción ("correspondencia") tal que para todo $x \in \Delta$, f(x) es convexo y tal que la gráfica de f es cerrada. Entonces, existe $x \in \Delta$ tal que $x \in f(x)$.
- Prueba de la gráfica cerrada
  - Sea $\{s^k\}$ una secuencia de perfiles estratégicos que convergen en $s*$; sea $r^k \in f(s^k)$; y sea r^* un punto de acumulación de $\{r^k\}$. limitamos la atención a una subsecuencia convergente de $\{r^k\}$. Mediante continuidad de u,

$$(\forall s'_n \in S_n) u_n(r^*_n, s^*_{-n}) = \lim_{k \to \infty} u_n(r^k_n, s^k_{-n})$$
$$\geq \lim_{k \to \infty} u_n(s'_n, s^k_{-n}) = u_n(s'_n, s^*_{-n})$$

24

Otras pruebas de existencia

- Las varias pruebas de existencia "general" del equilibrio de Nash se basan en los teoremas del punto fijo.
  - Algunos son teoremas topológicos
  - Más adelante, nos encontraremos un teorema de punto fijo basado en retícula.

25

Soluciones no cooperativas

Equilibrio correlacionado

26

Motivación

- Los jugadores se pueden correlacionar objetivamente por motivos externos al juego:
  - Pueden tener una variable común, como el tiempo.
  - Pueden tener una cultura común que les dispone a tener inclinaciones comunes, desconocidas para el observador exterior, que aparecen como correlaciones en el comportamiento.
- El juego también se puede corelacionar subjetivamente.
  - Talvez el observador esté aprendiendo algún aspecto desconocido del comportamiento humano.
  - Quizá el observador sepa que cada tribu tiene un jefe sin saber quién es. Entonces, un comportamiento de "jefe" por parte de un jugador hace menos probable que otros lo exhiban.

27

Definición

- Dado un juego finito en forma estratégica (N,S,u), un *perfil de estrategia correlacionada* tiene estos elementos:
  - Un espacio de probabilidad finito (Ω,π)
  - Para cada jugador n, una partición de información P_n de Ω.
  - Para cada jugador n, una estrategia $\sigma_n:\Omega\rightarrow S_n$ mensurable con respecto a P_n.
- El perfil de estrategia correlacionada es un *equilibrio correlacionado* si para cada n y cada estrategia τ_n mensurable con respecto a P_n,

$$\sum_{\omega\in\Omega} u_n\left(\sigma(\omega)\right)\pi(\omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} u_n\left(\tau_n(\omega),\sigma_{-n}(\omega)\right)\pi(\omega)$$

28

Resultado de caracterización

- Teorema. Cada distribución de probabilidad π de perfiles estratégicos en un equilibrio correlacionado se puede lograr fijando el espacio de probabilidad a (S,π), la partición P_n sea conjuntos de la forma $\{s \in S | s_n = a\}$, y el perfil de estrategia σ tal que $\sigma_n(s) = s_n$.
  - Por lo tanto abreviamos diciendo "π es un equilibrio correlacioando" para decir que $((S,\pi),P,\sigma)$ según se define en el teorema es un equlibrio correlacionado.

29

Ejemplo

	L	R
T	2,1	0,0
B	0,0	1,2

	L	R
T	$\frac{p_1}{p_1+p_2}$	$\frac{p_2}{p_1+p_2}$
B	$\frac{p_3}{p_3+p_4}$	$\frac{p_4}{p_3+p_4}$

	L	R
T	$\frac{p_1}{p_1+p_3}$	$\frac{p_2}{p_2+p_4}$
B	$\frac{p_3}{p_1+p_3}$	$\frac{p_4}{p_2+p_4}$

	L	R
T	p_1	p_2
B	p_3	p_4

- Condiciones:

$$\frac{2p_1}{p_1+p_2} + \frac{0p_2}{p_1+p_2} \geq \frac{0p_1}{p_1+p_2} + \frac{1p_2}{p_1+p_2}$$

  - $2p_1 \geq p_2$
  - $p_4 \geq 2p_3$
  - $2p_4 \geq p_2$
  - $p_1 \geq 2p_3$

30

Resultados adicionales

- Teorema. Si π es una distribución de probabilidad de perfiles estratégicos en un equilibrio Nash, entonces π es un equilibrio correlacionado.
- Teorema. El conjunto de equilibrios correlacionados π es un conj. cerrado, convexo.
- Prueba. π es un equilibrio correlacionado si y sólo si satisface el siguiente conj. de desigualdades lineales, para todas las funciones de jugadores n $f_n:S_n \rightarrow S_n$.

$$\sum_{s \in S} \pi(s) u(s) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) u\left(f_n(s_n), s_{-n}\right)$$

- Teorema. Cualquier estrategia jugada con probabilidad positiva en un equilibrio correlacionado es racionalizable.

31

Soluciones no cooperativas

Formas extensivas y racionalidad secuencial

32

Formas extensivas

- Una forma extensiva consiste en:
  - El conjunto de jugadores, **N**.
  - El conjunto de historias (secuencias) H, que incluye la secuencia vacía y tiene la propiedad de que si $(a_1,\ldots,a_K)\in H$ y $L<K$, entonces $(a_1,\ldots,a_L)\in H$.
    - Una historia $(a_1,\ldots,a_L)$ es *completa* (o *terminal*) si no hay $K>L$ tal que $(a_1,\ldots,a_K)\in H$. Todas las historias infinitas $(a_1,\ldots,a_l,\ldots)$ son completas.
    - Para cualquier historia no terminal escriba $A(h) = \{a|(h,a) \in H\}$
  - Una función de pago que relaciona historias completas con pagos para cada jugador.
  - Una función P que asigna a cada historia no terminal $h\in H$ un jugador n o posibilidad c (el jugador que se "mueve" en h); si $P(h) = c$, asigna también una distribución de probabilidad en A(h).
  - Una partición (I^k) de h no terminal con $P(h)\in N$ tal que, si $h,h' \in I^k$, entonces $A(h) = A(h')$ y $P(h) = P(h')$.

33

Definiciones

- Se dice que un juego tiene recuerdo perfecto sólo si ningún jugador olvida lo que sabe y lo que ha hecho. Siempre asumimos un juego perfecto.
- Un juego de información perfecta es un juego en el cual todos los conjuntos de información son simples.

34

Racionalidad secuencial

- Dado un conjunto de información I_n, donde se mueve el jugador n, éste tiene
  - una distribución de probabilidad $\mu(.|I_n)$ sobre I_n
  - y una distribución de probabilidad sobre el juego de otros en el "juego de continuación" (que puede no ser un "subjuego"),

  representando sus creencias supeditado a que se alcance I_n
- Un jugador n es *racional secuencialmente* sólo si, en cualquier conj. de info. I_n que se mueva, maximiza su pago esperado a condición de que I_n se alcance y según sus creencias en I_n.

35

Dominancia condicional

- Una estrategia está dominada condionalmente en I_n si y sólo si su restricción al "juego de continuación" en I_n está estrictamente dominada en ese juego para cada probabilidad de distribución en I_n.
- Un jugador racional secuencialmente nunca juega una estrategia dominada condicionalmente.

36

Dominancia iterativa condicional

- Primer paso
  - Cada jugador es racionalmente secuencial. Por tanto, sólo juega estrategias no dominadas condicionalmente.
  - Cree un nuevo juego eliminando las estrategias dominadas condicionalmente del juego original.
- Iteración n+1
  - Todo jugador sabe que otros sólo jugarán las estrategias restantes de la iteración n. Los jugadores secuencialmente racionales escogen la mejor respuesta en cualquier conj. de info., esto es, una estrategia que no está dominada condicionalmente en el nuevo juego.
  - Cree la forma estratégica n+1 eliminando estrategias dominadas condicionalmente de la forma estratégica n.
- Si el juego original es finito, al final no se realiza ningún cambio.

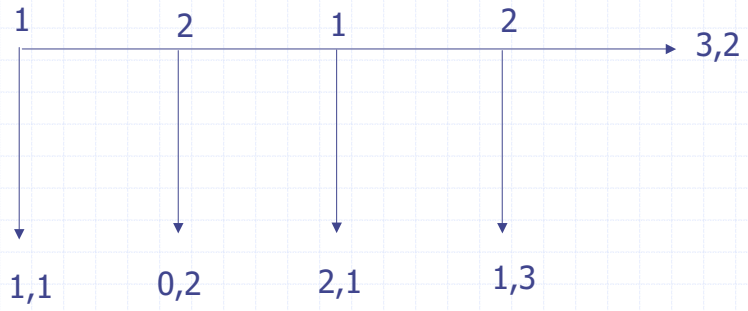
37

"Teorema"

Si el juego y la racionalidad secuencial de jugadores son conocidos por todos, entonces jugarán un perfil de estrategia que sobreviva a la dominancia iterativa condicional.

38

Juego del ciempies



39

Inducción hacia atrás

- La dominancia iterativa condicional en un juego de información perfecta con historias finitas se llama inducción hacia atrás.

40

Equilibrio secuencial

- Una *valoración* es un par $(s,\mu(.|.))$ de perfil estratégico s y una función $\mu(.|.)$ que da una distribución de probabilidad condicional $\mu(.|I_n)$ en cada conjunto de información I_n.
- Una valoración $(s,\mu(.|.))$ es *racional secuencial* sólo si cada s_n es una mejor respuesta a s_{-n} en cada conj. de info. I_n de n conforme a $\mu(.|I_n)$.
- Una valoración $(s,\mu(.|.))$ es *consistente* sólo si hay una secuencia $((s^k,\mu^k(.|.)))_k$ de valoraciones s.a.
  - $(s^k,\mu^k(.|.)) \rightarrow (s,\mu(.|.))$ métrica euclídea;
  - cada s^k está completamente mezclada, y
  - $\mu^k(.|.)$ se deriva de s^k utilizando la norma de Bayes.

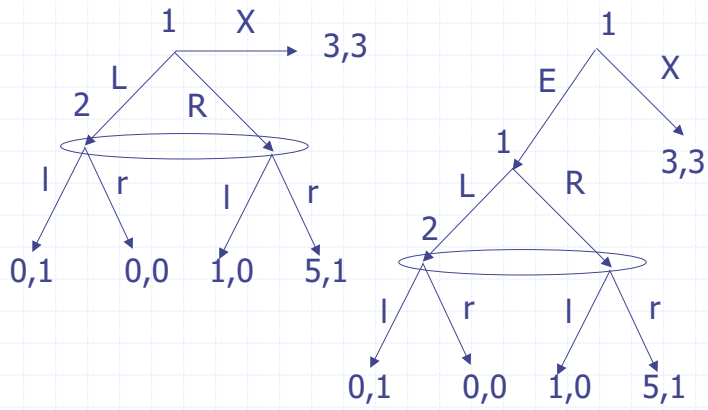
41

Equilibrio secuencial

<u>Definición (Kreps, Wilson)</u>: un equilibrio secuencial es una valoración que es tanto racional secuencialmente como consistente.

42

Ejemplo



43