El núcleo

MIT 14.126. Otoño 2001

Resumen de la clase

- Juegos de coalición y el núcleo
  - Utilidad no transferible ("UNT")
  - Utilidad transferible ("UT")
- Núcleo UT
  - Interpretaciones
  - Aplicaciones varias
- Aplicaciones del núcleo UNT
  - Problemas de emparejamiento
  - Economías de intercambio

Juegos de coalición

- Un juego de coalición es un par (N,w) donde
  - N es el conjunto de jugadores
  - Por cada $S \subset N$, $w(S) \subset R^S$, interpretado como el conjunto de vectores de pago o "distribuciones de valor" para la coalición S.
- Interpretaciones
  1. Los puntos en w(S) son pagos que los miembros de S pueden lograr por sí mismos, como en una economía de intercambio. Ésta es nuestra interpretación estándar.
  2. Los puntos en w(S) son pagos que los miembros de S pueden garantizar para sí mismos mediante alguna acción factible.
- Alternativa: juegos en forma de función de partición…?!

Viabilidad, bloqueo y núcleo

- Un reparto de valor $x \in R^N$ resulta…
  - …"factible" si $x \in w(N)$
  - …"bloqueado" por la coalición S si hay un punto en w(S) que mejore estrictamente por cada miembro de S

$$\exists \hat{x} \in w(S), \forall i \in S, \hat{x}_i > x_i$$

  - …en el "núcleo" si es factible y no bloqueado
- Con más precisión,

$$Core(N,w) = \left\{ x \in w(N) : \neg\left(\exists S \subset N, \exists \hat{x} \in w(S), \forall i \in S, \hat{x}_i > x_i\right)\right\}$$

Cohesividad

- Decir que la viabilidad significa $x \in w(N)$ asume implícitamente una condición que llamamos "cohesividad".
- Un juego UTN es "cohesivo" si por cada partición $\{S_1,\ldots,S_k\}$ de N

$$\left[x_{S_j} \in w(S_j), j=1,\ldots,k\right] \Rightarrow x \in w(N)$$

- Limitamos nuestra atención a los juegos cohesivos.

Juegos de coalición con transferencias

- Un juego de coalicón con utilidad transferible (UT) es un par (N,v) donde
  - N es el conjunto de jugadores
  - v correlaciona "coaliciones" (subconj. $S \subset N$) a números reales sujeto a $v(\emptyset)=0$.
  - El juego UT (N,v) es una descripción alternativa del juego UNT (N,w) en la que

$$w(S)=\left\{x \in \Re^S : \sum_{i \in S} x_i \le v(S)\right\}$$

Unicidad

- El juego UT (N,v) es cohesivo si por cada partición $(S_1,\ldots,S_k)$ de N

$$\sum_{j=1}^{k} v(S_j) \le v(N)$$

- Esto significa aproximadamente que "la coalición del todo puede hacer cualquier cosa que sus subcoaliciones puedan hacer por separado".

Núcleo UT

- Los juegos UT son casos especiales de juegos UNT, y el núcleo se define del modo correspondiente. Si (N,v) es un juego UT y (N,w) es la representación UTN correspondiente, entonces:

$$\begin{aligned} & Core(N,v)=Core(N,w) \\ & =\left\{x \in \Re^N : x \in w(N), \neg\left(\exists S \subset N, \exists \hat{x} \in w(S), \forall i \in S, \hat{x}_i > x_i\right)\right\} \\ & =\left\{x \in \Re^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \neg\left((\exists S \subset N)\sum_{i \in S} x_i < v(S)\right)\right\} \\ & =\left\{x \in \Re^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N), (\forall S \subset N)\sum_{i \in S} x_i \ge v(S)\right\} \end{aligned}$$

Pagos del núcleo como precios CE

- Interpretación de mercado del juego de coalición
  - Cada jugador aporta un paquete indivisible de recursos
  - Los agentes pujan para comprar los recursos de los jugadores
- Los precios x de equilibrio competitivo satisfacen
  - Beneficio total cero para los agentes

$$v(N) - \sum_{i \in N} x_i = 0$$

  - Oportunidades de beneficio no perdidas

$$v(S) - \sum_{i \in S} x_i \le 0 \text{ for all } S \subset N$$

- Observe que
  - x es un vector de precio CE si y sólo si $x \in \mathrm{Core}(N,v)$
  - Funciona aunque el mercado no sea anónimo: los recursos no pueden separarse de sus propietarios.

Algunos ejemplos de UT

Juegos simples

Juegos convexos

Vickrey-Clarke-Groves

Juegos “simples”

- Definiciones:
  - Las "coaliciones ganadoras" S pueden hacer valer el resultado deseado: v(S)=1.
  - Las coaliciones "perdedoras" S no: v(S)=0.
  - Los jugadores con "veto" forman parte de toda coalición ganadora.
- Observe: si $x \in \mathrm{Core}(N,v)$, entonces $x_i \le v(N)-v(N\backslash i)$. (¿Por qué?)
- Por tanto,
  - Sólo los jugadores con veto obtienen pagos positivos en el núcleo.
  - Si no hay jugadores con veto el núcleo está vacío.

Juegos convexos, 1

- Un juego (N,v) es “convexo” si para todo S,T $v(S)+v(T) \le v(S \cap T)+v(S \cup T)$.
- Intuición: los jugadores se complementan: si $i \notin S' \supset S''$, entonces $v(S' \cup \{i\})-v(S') \ge v(S'' \cup \{i\})-v(S'')$.
  - Prueba: tomemos S=S’ y $T=S'' \cup \{i\}$ y apliquemos la definición.
- “Algoritmo voraz”:
  - Clasifique a los jugadores en un orden, digamos 1,…,|N|.
  - Haga que $x_i=v(\{1,\dots,i\})-v(\{1,\dots,i-1\})$.

Juegos convexos, 2

- Teorema. Si (N,v) es un juego convexo, cada uno de los repartos de valor voraz |N|! está en Core(N,v).
- Prueba. Fije un orden de los jugadores. Sea la coalición $T=\{j_1,\ldots j_n\}$ clasificada en orden ascendente.

$$\sum_{k=1}^{n} x_{j_k} = \sum_{k=1}^{n}[v(1,\ldots,j_k) - v(1,\ldots,j_k-1)]$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}[v(j_1,\ldots,j_k) - v(j_1,\ldots,j_{k-1})]$$

$$= v(j_1,\ldots,j_n) = v(T)$$

- ¿Verdadero o falso?: “el núcleo de un juego convexo es la cápsula convexa de las distribuiciones de valor voraz |N|!”.

Un aparte

- La condición de definición es una versión de la “supermodularidad”.
  - Dado un conj. parcialmente ordenado $(Z,\leq)$ en el cual se unen, $x\wedge y=\sup\{z:z\leq x, z\leq y\}$ y $x\vee y=\inf\{z:z\geq x, z\geq y\}$ están bien definidos, una función $f:Z\rightarrow R$ es supermodular si $f(x)+f(y)\leq f(x\wedge y)+f(x\vee y)$.
  - En este ejemplo, $\leq$, $\wedge$ y $\vee$ son $\subset$, $\cap$, y $\cup$.
  - Las funciones objetivas supermodulares caracterizan las variables de elección que son complementos.
  - Las funciones duales supermodulares (coste o gasto) caracterizan las variables de elección que son sustitutos.

Ejercicio

- Suponga que a cada jugador se le dota de un vector de recursos z_i en R^k. La coalición S puede producir $v(S)=f(\Sigma_{i\in S} z_i)$.
  - Si k=1, bajo qué condiciones en f es el juego (N,v) “convexo” por cada posible vector de dotación z?
  - Si k=|N| y el jugador i tiene 1 unidad del recurso i y ninguna de los otros recursos, ¿bajo qué condiciones en f es (N,v) convexo?
  - Si k es general, ¿bajo qué condiciones en f es el juego (N,v) convexo por cada posible vector de dotación z?

Vickrey-Clarke-Groves

- Formulación
  - Existe un conjunto finito de “decisiones” D controlado por el jugador 0, quien puede excluír la participación.
  - Cada jugador i>0 tiene una valoración $v_i(d)$ por cada $d\in D$.
  - $v(S)=0$ si $0\notin S$; de otro modo

$$v(S) = \max\left\{\sum_{i\in S} v_i(d) : d\in D\right\}$$

  - Pago con mecanismo "pivote":

$$x_i = v(N) - v(N\setminus i)$$

Vickrey-Clarke-Groves y el núcleo

- Los jugadores son “sustitutos” si

  $$i \notin T \supset S \Rightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

- El pago Vickrey viene dado por:

  $$x_i(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \setminus i) \text{ for } i > 0 \\ v(S) - \sum_{i \in S, i \neq 0} x_i(S) \end{cases}$$

- Teorema. Los jugadores son sustitutos si y sólo si para todo $S \subset N$, $x(S) \in Core(S,v)$.

Ejercicio

- Pruebe el teorema precedente.
- Suponga que cada jugador está dotado con un vector de recursos z_i en R^k. La coalición S puede producir $v(S)=f(\Sigma_{i \in S} z_i)$.
  - Si k=1, bajo qué condiciones en f son los jugadores “sustitutos” en el juego (N,v) por cada posible vector de dotación z?
  - Si k es general, bajo que condiciones en la tecnología f son los jugadores “sustitutos” por cada posible vector de dotación z?

Aplicaciones UNT

Problemas de emparejamiento

Equilibrio competitivo en el núcleo

Ejemplos de emparejamiento

- Se trata de modelos en los que los jugadores tienen preferencia sobre los otros con los que están emparejados, pero no cambia dinero de manos.
  - El “problema del matrimonio” Gale-Shapley
  - El “problema del compañero de habitación”
  - El problema de la “admisión”
  - …

El "problema del matrimonio"

- Jugadores i=1,...,m son "hombres" y jugadores m+1,...,N son "mujeres".
  - Un "emparejamiento" es una correlación de $f:N \rightarrow N$ tal que $f=f^{-1}$ y tal que cada mujer se empareje con un hombre o con ella misma e igualmente cada hombre...
  - La función de utilidad de cada jugador depende sólo del propio emparejamiento de los jugadores.
  - Para la coalición S, el conjunto de perfiles de utilidad viables son aquellos que corresponden a los emparejamientos viables entre los miembros de S.
- ¿Se trata de un núcleo no vacío?
  - Suponga que todas las preferencias son estrictas.

Parejas estables y el núcleo

- Una pareja f es "estable" si se dan dos condiciones:
  1. es racional individualmente: para todo m y w:

     $$U_m(f(m)) > U_m(m) \;\&\; U_w(f(w)) > U_w(w)$$
  2. no hay hombre m y mujer w para quien:

     $$U_m(w) > U_m(f(m)) \;\&\; U_w(m) > U_w(f(w))$$
- Teorema. En el núcleo del juego del problema del matrimonio hay una distribución de valor si y sólo si la pareja correspondiente es estable.
- Prueba. Si la pareja f es inestable como arriba, resulta "bloqueada" por coalición {m,w}. Si la distribución de valor queda bloqueada por la coalición S, por cada i que pertenece a S, (i,f(i)) es inestable.

Teorema Gale-Shapley

- Teorema. Existe una pareja estable en el problema del matrimonio.
- Prueba. Aplique un algoritmo de aceptación diferido, de la siguiente forma:
  - Cada jugador comunica sus preferencias a la "yenta"—una rutina informática. Hay dos versiones, dependiendo de qué lado hace la oferta. Aquí veremos la versión de la oferta de la mujer...

Procedimiento de Yenta

1. Cada mujer realiza una oferta a la primera opción de su lista.
2. Cada hombre revisa sus ofertas actuales y se queda con la mejor (pero "difiere la aceptación").
3. La mujer rechazada tacha de su lista al hombre que la rechaza y hace ofertas a las mejores opciones restantes.
4. Si se realizan ofertas nuevas en esta ronda, vuelva al paso 2. De lo contrario, deténgase y el emparejamiento finaliza.

Análisis

- Tras cada ronda, el emparejamiento tiene una utilidad mayor para cada hombre.
- Por tanto, en el emparejamiento final,
  - Ningún hombre prefiere emparejarse con una mujer que ha rechazado previamente.
  - Ninguna mujer prefiere emparejarse con un hombre a quién aún no se haya ofrecido.
  - El emparejamiento es estable.

Equilibrio competitivo y el núcleo UNT

- Un puñado de ideas
  - Áreas comerciales: ¿pueden los países con régimen de libre comercio beneficiarse de acuerdos especiales?
  - Empresa: ¿pueden los productores en mercados competitivos beneficiarse integrándose y comerciando con condiciones especiales?
  - ¿Puede una coalición de jugadores que hace frente a precios dados estar todos estrictamente mejor comerciando entre ellos?
    - Consejo: piense en la prueba de Arrow del primer teorema de la economía del bienestar.

CE es el núcleo

- Considere una economía de intercambio (N,L,u,ω)
  - N es el conjunto de agentes/jugadores
  - L es el número de bienes
  - $U_n:R_+^L \rightarrow R$ la función de utilidad de un agente n, que es continua y va en aumento.
  - ω_n es el vector de dotación del agente n
- Asuma que existe un equilibrio competitivo. Imite el argumento de Arrow del primer teorema del bienestar.
  - Cualquier distribución z_S estrictamente preferida por cada miembro i de la coalición S tiene $p \cdot z_i > 0$ en los precios de equilibrio competitivo y por lo tanto no es viable para la coalición.