14.126 Teoría de juegos
Sergei Izmalkov y Muhamet Yildiz

Otoño 2001

Sinopsis de la teoría de la elección

El presente documento resume los elementos de la teoría de la utilidad esperada. Si desea una exposición detallada de los primeros cuatro apartados, consulte Kreps (1988); para el último apartado consulte Savage (1954). Definiremos en primer lugar una función de elección y presentaremos las condiciones necesarias y suficientes que ésta debe satisfacer para ser representada por una relación de preferencia: preferencias reveladas. A partir de ahí presentaremos las condiciones necesarias y suficientes que dicha relación de preferencia debe satisfacer para ser representada por una función de utilidad: representación ordinal. A continuación, presentamos las teorías de utilidad esperada de Von Neuman y Morgenstern, Anscombe y Auman, y Savage, donde la función de utilidad que representan adopta una forma de expectativa: representación cardinal.

1 Preferencias Reveladas

Tengamos en cuenta un conjunto *X* de alternativas. Se trata de alternativas que se excluyen mutuamente, es decir, que no se pueden elegir dos alternativas diferentes a la vez. Exploramos todo el conjunto de alternativas posibles para que las opciones del jugador estén siempre definidas.

Definición 1: Por función de elección, entendemos una función $c : 2^x \setminus \{\phi\} \to 2^x \setminus \{\phi\}$ tal que:

$$c(A) \subseteq A \text{ para cada } A \in 2^x \setminus \{\phi\}.$$

Aquí $c(A)$ consiste en las alternativas que el agente *tal vez* escoja si se le limita a *A*; escogerá sólo una de ellas. Observe que se asume que $c(A)$ es no vacío.

Nuestro segundo constructo es una relación de preferencia. Tome una relación $\succeq$ sobre *X*, esto es, un subconjunto de $X \times X$. Se dice que una relación $\succeq$ es completa si y sólo si, dado cualquier $x, y \in X$, bien $x \succeq y$ o $y \succeq x$. Se dice que una relación $\succeq$ es transitiva si y sólo si, dado cualquier $x, y, z \in X$,

$$[x \succeq y \text{ y } y \succeq z] \Rightarrow x \succeq z.$$

Definición 2 *Una relación es una* relación de preferencia *si y sólo si es completa y transitiva.*

Dada una relación de preferencia $\succeq$, podemos definir preferencia estricta $\succ$ mediante

$$x \succ y \iff [x \succeq y \text{ y } y \not\succeq x],$$

y la indiferencia $\sim$, mediante

$$x \sim y \iff [x \succeq y \text{ y } y \succeq x].$$

Considere ahora la función de elección $c\,(\cdot;\succeq)$ de un agente que quiere escoger la mejor alternativa disponible con respecto a una relación de preferencia $\succeq$. Esta función se define mediante

$$c\,(A;\succeq) = \{x \in A | x \succeq y \quad \forall y \in A\}.$$

Observe que, como $\succeq$ es completo y transitivo, $c\,(A;\succeq) \neq \emptyset$ siempre que *A* sea finito. Tenga en cuenta un conjunto *A* con miembros *x* e *y* tal que nuestro agente pueda escoger *x* a partir de *A*(*i.e., x* $\succeq$ *y*). Considere también un conjunto *B* a partir del cual puede elegir *y* (*i.e., y* $\succeq$ *z* para cada z $\in$ *B*). Ahora, si *x* $\in$ *B,* entonces también puede elegir *x* de *B (i.e., x* $\succeq$ *z* para cada z $\in$ *B).* Esto es, $c(\cdot;\succeq)$ satisface el siguiente axioma de Hauthakker:

Axioma 1. (Hauthakker) *Dado cualquier A, B con x, y* $\in$ *A* $\cap$ *B, si x* $\in$ *c (A)* y *y* $\in$ *c(B), entonces x* $\in$ *c(B).*

Resulta que cualquier función de elección *c* que satisface el axioma de Hauthakker se puede considerar que proviene de un agente que intenta elegir la mejor alternativa disponible con respecto a una relación de preferencia $\succeq_c$. Dicha relación de preferencia se puede medir mediante:

$$x \succeq_c y \iff x \in c\,(\{x,y\}).$$

Teorema 1. *Si* $\succeq$ *es una relación de preferencia, entonces* $c(\cdot;\succeq)$ *satisface el axioma de Hauthakker. Al contrario, si una función de elección c satisface el axioma de*

Hauthakker, entonces existe una relación de preferencia $\succeq_c$*, tal que* $c = c\,(\cdot;\succeq_c)$.

2 Representación ordinal

Estamos interesados en relaciones de preferencia que se pueden *representar* mediante una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ en el siguiente sentido:

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{OR}$$

Claramente, cuando el conjunto X de alternativas es numerable, cualquier relación de preferencia se puede representar en este sentido. El siguiente esquema pone de relieve que una relación ha de ser una relación de preferencia para ser representada por una función de utilidad.

Teorema 2. *Sea X finito (o numerable). Una relación* $\succeq$ *se puede representar como una función de utilidad U en el sentido de (OR) si y sólo si* $\succeq$ *es una relación de preferencia. Es más, si* $U : X \to \mathbb{R}$ *representa* $\succeq$*, y si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente*, entonces* $f \circ U$ *también representan* $\succeq$.

Por el último enunciado, llamamos a tales funciones de utilidad ordinales.

Cuando X es no numerable, tal vez algunas relaciones de preferencia no estén representadas por ninguna función de utilidad, como las preferencias lexicográficas sobre $\mathbb{R}^2$.[1] Si las preferencias son continuas se puede representar mediante una función de utilidad (continua) incluso cuando X no es numerable.

Definición 3. *Sea X un espacio métrico. Una relación de preferencia* $\succeq$ *se dice que es continua si y sólo si, dadas dos secuencias* (x_n) *e* (y_n) *con* $x_n \to x$ *e* $y_n \to y$,

$$[x_n \succeq y_n \quad \forall n] \Longrightarrow x \succeq y.$$

Teorema 3. *Sea X un espacio métrico separable, como* $\mathbb{R}^n$. *Una relación* $\succeq$ *sobre X se puede representar por una función de utilidad continua* $U : X \to R$ *en el sentido de (OR) si y sólo si* $\succeq$ *es una relación de preferencia continua.*

---

[1] De hecho, alguna forma de numerabilidad es necesario para la representabilidad. X debe ser separable con respecto a la topología de orden de $\succeq$, esto es, debe contener un subconjunto numerable que sea denso con respecto a la topología de orden. (Véase Teorema 3.5 en Kreps, 1988).

Cuando un jugador escoge entre sus estrategias, no sabe qué estrategias elegirán los otros, por tanto, no está seguro de las consecuencias de sus actos (a saber, estrategias). Para analizar las decisiones de los jugadores en un juego, sería útil tener una teoría para la toma de decisiones que nos permita expresar las preferencias de un agente sobre actos con consecuencias inciertas (estrategias) en términos de su actitud hacia las consecuencias.

3 Representación cardinal

Considere un conjunto finito Z de consecuencias (o precios). Sea S el conjunto de todos los estados del mundo. Tome un conjunto F de actos $f : S \to Z$ como el conjunto de alternativas (i.e., conjunto $X = F$). Cada estado $s \in S$ describe todos los aspectos relevantes del mundo, luego los estados se excluyen mutuamente. Es más, la consecuencia $f(s)$ del acto f depende del verdadero estado del mundo, así, el agente tal vez no esté seguro de las consecuencias de sus actos. Nos gustaría representar la relación de preferencia del agente $\succeq$ sobre F mediante un $U : R \to \mathbb{R}$ tal que

$$U(f) \equiv E[u \circ f]$$

(en el sentido de (OR)) donde $u : Z \to \mathbb{R}$ es una "función de utilidad" sobre Z y E es un operador de expectativa sobre S. Esto es, queremos:

$$f \succeq g \iff U(f) \equiv E[u \circ f] \geq E[u \circ g] \equiv U(g). \qquad \text{(EUR)}$$

En la formulación de Von Neumann y Morgenstern, la distribución de probabilidad (y por tanto el operador de expectativa E) es dado objetivamente. De hecho, formulan actos como loterías, p.ej., distribuciones de probabilidad sobre Z. En un mundo tal, caracterizan las condiciones (sobre $\succeq$) bajo las que $\succeq$ es representable en el sentido de (EUR).

Para los casos que nos interesan, no existe distribución de probabilidad dada objetivamente sobre S. Por ejemplo, la posibilidad de estrategias que desplegarán los otros participantes no se da objetivamente. Por tanto, necesitamos determinar la estimación de probabilidad (subjetiva) del agente sobre S.

Anscombe y Aumann desarrollan un modelo manejable en los que las valoraciones de probabilidad subjetiva del agente se determinan utilizando su actitud hacia las loterías (con probabilidades dadas objetivamente) así como hacia los actos con consecuencias inciertas. Para ello, estudian las preferencias del agente sobre el conjunto P^S de todos los “actos” cuyos resultados son loterías sobre *Z*, donde *P* es el conjunto de todas las loterías (distribuciones de probabilidad sobre *Z*).

En este escenario, es sencillo determinar las estimaciones de probabilidad del agente. Considere un subconjunto *A* de *S* y cualesquiera dos consecuencias $x, y \in Z$ con $x \succ y$. Considere el acto f_A que da como resultado la lotería segura de *x* sobre A,[2] y la lotería segura de *y* sobre *S*\A. (Véase figura 1). Bajo las suficientes suposiciones de continuidad (que también son necesarias para

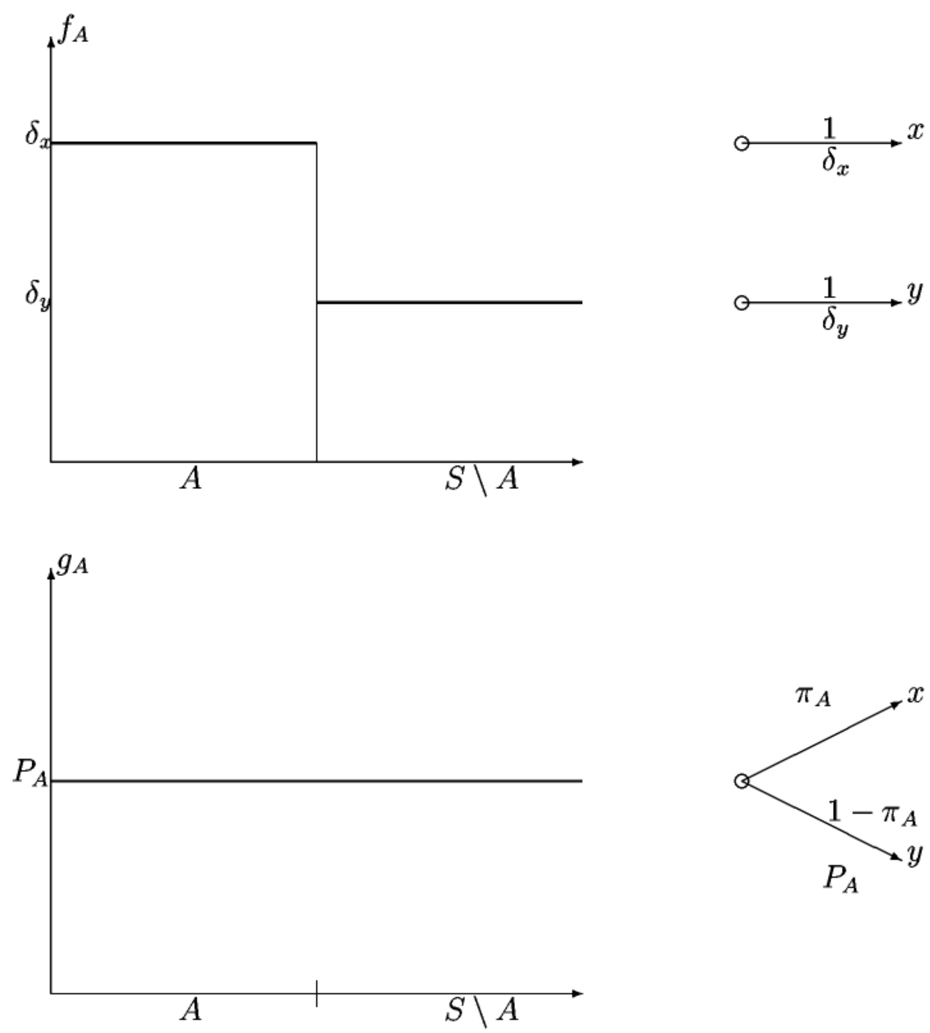

Figura 1: figura de Anscombe y Aumann

[2] Esto es, $f_A(s) = \delta_x$ siempre que $s \in A$ donde δ_x asigna la probabilidad 1 al resultado *x*.

la representabilidad), existe cierto $\pi_A \in [0, 1]$ tal que el agente es indiferente entre f_A y el acto g_A que siempre da como resultado la lotería p_A que da x con probabilidad π_A e y con probabilidad $1 - \pi_A$. Entonces, π_A es la probabilidad (subjetiva) de que el agente asigne al evento A — de acuerdo con la suposición de que π_A no depende de qué alternativas x e y se utilicen. De este modo, obtenemos una distribución de probabilidad sobre S. Utilizando la teoría de Von Neumann y Morgenstern, obtenemos un teorema de representación en este espacio ampliado donde tenemos tanto la incertidumbre subjetiva como el riesgo dado objetivamente.

Savage desarrolla una teoría con incertidumbre subjetiva pura. Sin utilizar probabilidades dadas objetivamente, bajo ciertas suposiciones de "rigurosidad", deriva una distribución de probabilidad única sobre S que representa las creencias del agente incrustadas en sus preferencias, y a continuación, utilizando la teoría de Von Neumann y Morgenstern obtiene un teorema de representación — en el que la función de utilidad y las creencias se derivan de las preferencias.

A continuación presentamos las teorías de Von Neumann, Morgenstern y Savage.

4 Von Neumann y Morgenstern

Tenemos en cuenta un conjunto finito Z de premios, y el conjunto P de todas las probabilidades de distribución $p : Z \to [0,1]$ sobre Z, donde $\sum_{z \in Z} p(z) = 1.$ A esto lo llamamos loterías de distribución de probabilidades. Nos gustaría tener una teoría que construya las preferencias de un jugador en la lotería a partir de sus preferencias en los premios. Una relación de preferencia $\succeq$ sobre P se dice que está representada por una función de utilidad von Neumann-Morgenstern $u : R \to \mathbb{R}$ si y sólo si:

$$p \succeq q \iff U(p) \equiv \sum_{z \in Z} u(z)p(z) \geq \sum_{z \in Z} u(z)q(z) \equiv U(q) \tag{1}$$

para cada $p, q \in P$. Observe que $U : P \to$ J1 representa $\succeq$ en sentido ordinal. Esto es, el agente actúa como si quisiera maximizar el valor esperado de u. Las condiciones suficientes y necesarias para una representación como en (1) son las siguientes:

Axioma 2 *$\succeq$ es completo y transitivo.*

Esto es necesario por el Teorema 2, ya que U representa $\succeq$ en sentido ordinal. La segunda condición se llama axioma de *independencia*, y enuncia que la preferencia de un jugador entre dos

Figura 2: dos loterías

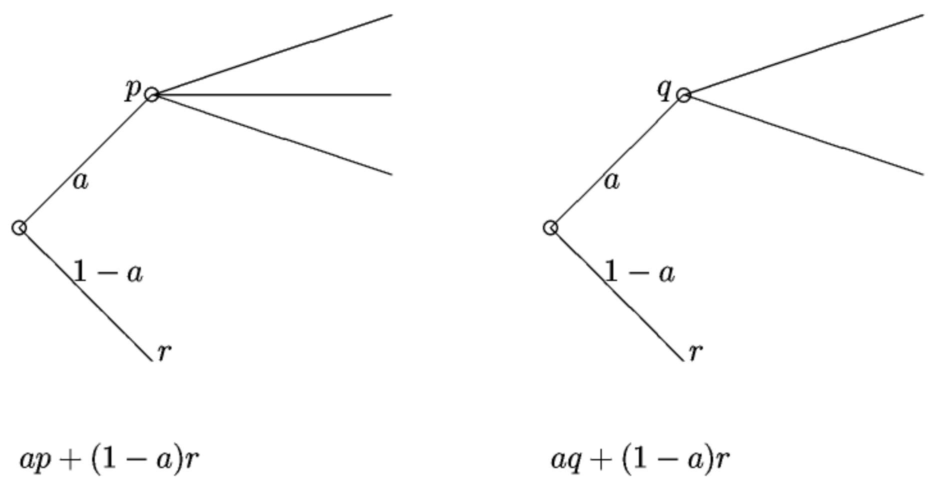

Figura 3: dos loterías compuestas

loterías p y q no cambia si lanzamos al aire una moneda y le asignamos una lotería fija r si sale "cruz".

Axioma 3. *Para cualesquiera* $p, q, r \in P$, *y cualesquiera* $a \in (0, 1]$, $ap + (1 - a)r \succ aq + (1 - a)r \Leftrightarrow p \succ q$.

Sean p y q las loterías ilustradas en la Figura 2. Entonces, las loterías $ap + (1 - a)r$ y $aq + (1 - a)r$ se pueden representar como en la Figura 3, donde lanzamos una moneda entre una lotería fija r y nuestras loterías p y q. El Axioma 3 que el agente no cambiaría de opinión una vez lanzada la moneda. Por tanto, nuestro axioma se puede tomar como un axioma de "consistencia dinámica" en este sentido.

La tercera condición es el axioma de *continuidad*. Estipula que no existen premios "infinitamente buenos"

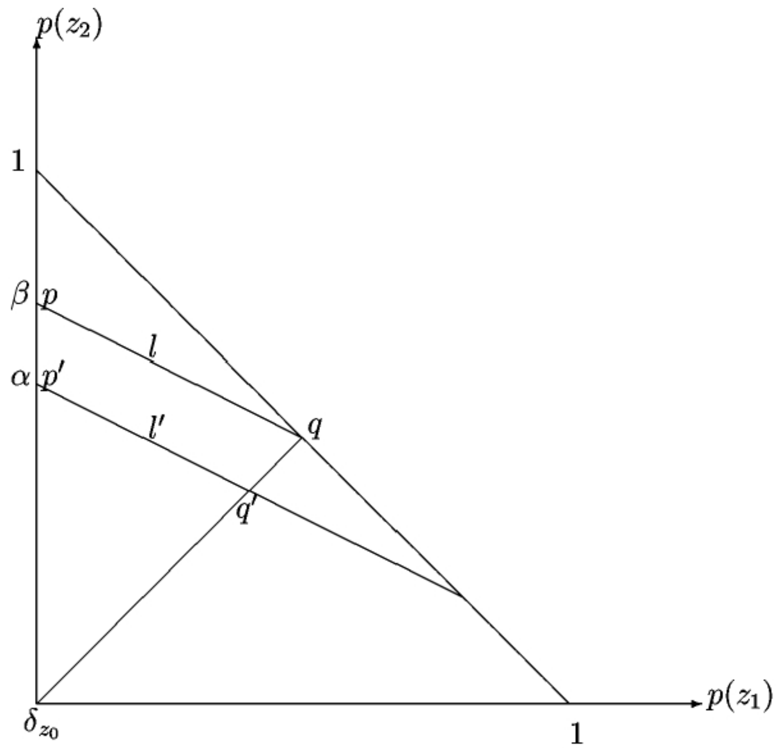

Figura 4: curvas de indiferencia en el espacio de las loterías

o "infinitamente" malos. [También se requiere cierto grado de continuidad para la representación ordinal.]

Axioma 4. *Para cualesquiera $p, q, r \in P$, si $p \succ q \succ r$, entonces existe $a, b \in (0, 1)$ tal que $ap + (1 - a)r \succ q \succ bp + (1 - r)r$.*

Los axiomas 3 y 4 implican que, *cualesquiera $p, q, r \in P$* y *cualquier $a \in [0, 1]$*,

$$\text{si } p \sim q, \text{ entonces } ap + (1 - a)r \sim aq + (- a)r. \qquad (2)$$

Esto tiene dos implicaciones:

1. Las curvas de indiferencia de las loterías son líneas recta.
2. Las curvas de indiferencia, que son líneas rectas, son paralelas.

Para ilustrar estos hechos, considere tres precios z_0, , z_1, y z_2, donde $z_2 \succ z_1 \succ z_0$. Una lotería p se puede dibujar en un plano tomando $p\,(z_1)$ como la primera coordinada (en el eje horizontal), y $p\,(z_2)$ como la segunda coordinada (en el eje vertical). $p\,(z_0)$ es $1 - p\,(z_1) - p\,(z_2)$. [Vea la ilustración en la Figura 4.] Dadas dos loterías cualesquiera p y q, las combinaciones convexas $ap + (1 - a)\,q$ con $a \in [0, 1]$ forman el segmento lineal que conecta p a q. Ahora, tomando $r = q$, podemos deducir de (2) que, si $p \sim q$, entonces $ap + (1 - a)\,q \sim aq + (1 - a)q = q$ para cada $a \in [0, 1]$. Esto es, el segmento lineal que conecta p a q es una curva de indiferencia. Es más, si las líneas l y l' son paralelas, entonces $\alpha/\beta = |q'|\,/\,|q|$, donde $|q|$ y $|q'|$ son las distancias de q y q' al origen, respectivamente. De ahí, tomando $a = \alpha/\beta$, calculamos que $p' = ap + (1 - a)\,\delta_{z0}$ y $q' = ap + (1 - a)\,\delta_{z0}$, donde δ_{z0} es la lotería en el origen, y da z_0 con probabilidad 1. Por lo tanto, mediante (2), si l es una curva de indiferencia, l' es también una curva de indiferencia, mostrando que las curvas de indiferencia son paralelas.

La línea l se puede definir mediante la ecuación $u_1p\,(z_1) + u_2p\,(z_2) = c$ para cierto u_1, , u_2, , $c \in \mathbb{R}$. Como l' es paralelo a 1, l' también se puede definir mediante la ecuación $u_1p\,(z_1) + u_2p\,(z_2) = c'$ para cierto c'. Como las curvas de indiferencia están definidas por la igualdad $u_1p\,(z_1) + u_2p\,(z_2) = c$ para varios valores de c, las preferencias están representadas por

$$\begin{aligned} U\,(p) &= 0 + u_1p\,(z_1) + u_2p\,(z_2) \\ &\equiv u(z_0)p(z_0) + u(z_1)p\,(z_1) + u(z_2)p(z_2), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u\,(z_0) &= 0, \\ u(z_1) &= u_1, \\ u(z_2) &= u_2, \end{aligned}$$

dando la representación deseada.

Esto es cierto en general, tal y como se pone de manifiesto en el siguiente teorema:

Teorema 4 *Una relación* $\succeq$ ***sobre P se puede representar mediante una función de utilidad von Neumann-Morgenstern u : Z → R como en (1) si y sólo si*** $\succeq$ ***satisface***

los axiomas 2-4. Es más, u y $\tilde{u}$ ***representan la misma relación de preferencia si y sólo si*** $\tilde{u}$ ***= au + b para cierto a > 0 y*** $b \in \mathbb{R}$**..**

A tenor del último enunciado de nuestro teorema, esta representación es "exclusiva hasta que llega a transformaciones afines". Esto es, las preferencias de un agente no cambian cuando cambiamos su función de utilidad von Neumann-Morgenstern (VNM) al multiplicarlo por un número positivo, o añadiéndole una constante; pero sí cambian cuando lo transformamos a través de una transformación no lineal. En este sentido, esta representación es "cardinal". Recuerde que, en una representación ordinal, las preferencias no cambiarían incluso si las transformaciones fuesen no lineales, con tal de que estuviese aumentando.

5 Savage

Tomemos un conjunto *S de estados s* del mundo, un conjunto finito *Z* de *consecuencias (x, y, z),* y tomemos el conjunto $F = Z^S$ de *actos* $f : S \to Z$ como el conjunto de alternativas. Fije una relación $\succeq$ sobre *F.* Nos gustaría encontrar las condiciones necesarias y suficientes en $\succeq$ para que $\succeq$ pueda estar representada por cierta *U* en el sentido de (EUR); esto es, $U(f) = E[u \circ f]$. En esta representación, tanto la función de utilidad $u : Z \to R$ y la distribución de probabilidad *p* sobre *S* (que determinan *E)* se derivan de $\succeq$. Los teoremas 2 y 3 nos dan la primera condición necesaria:

P 1 $\succeq$ *es una relación de preferencia.*

La segunda condición es la pieza central de la teoría de Savage:

El principio de la certidumbre *Si un agente prefiere un acto f a cierto acto g cuando sabe que cierto evento* $A \subset S$ *ocurre, y si prefiere f a g cuando sabe que A no ocurre, entonces debe preferir f a g cuando no sabe si A ocurre o no.* Este es el enunciado informal del principio de la certidumbre. Una vez que determinemos las evaluaciones de probabilidad del agente, nos dará el axioma de independencia, Axioma 3, de Von Neumann y Morgenstern. La siguiente formulación de Savage, P2, no sólo implica este enunciado informal, sino que también nos permite declararla formalmente, permitiéndonos definir preferencias condicionales. (Las preferencias condicionales también se usan para definir las creencias).

P 2 *Sea* $f,\ f',\ ,\ g,\ g' \in F$ *y* $B \subset S$ *sea tal que*

$$f(s) = f'(s) \text{ y } g(s) = g'(s) \text{ en cada } s \in B$$

y

$$f(s) = g(s) \text{ y } f'(s) = g'(s) \text{ en cada } s \notin B.$$

Sy $f \succsim g$, *entonces* $f' \succsim g'$.

Preferencias condicionales. Utilizando P2, podemos definir las preferencias condicionales como sigue. Dado cualquier $f,\ g,\ h \in F$ y $B \subset$ S, defina los actos $f^h_{|B}$ y $g^h_{|B}$ mediante

$$f^h_{|B}(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in B \\ h(s) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

y

$$g^h_{|B}(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } s \in B \\ h(s) & \text{de otro modo} \end{cases}.$$

Esto es, $f^h_{|B}$ y $g^h_{|B}$ están de acuerdo con f y g, respectivamente, sobre B, pero cuando B no ocurre, dan como resultado el mismo acto por defecto h.

Definición 4 ***(Preferencias condicionales)*** $f \succsim g$ dado B *si y sólo si* $f^h_{|B} \succsim g^h_{|B}$.

P2 garantiza que $f \succsim g$ dado B está bien definido, esto es, no depende del acto por defecto h. Para comprobarlo, tomemos *cualquier* $h' \in F$, y defina $f^{h'}_{|B}$ y $g^{h'}_{|B}$ consecuentemente. Compruebe que

$$f^h_{|B}(s) \equiv f(s) \equiv f^{h'}_{|B}(s) \quad \text{y} \quad g^h_{|B}(s) \equiv g(s) \equiv g^{h'}_{|B}(s)$$ en cada $s \in B$

y

$$f^h_{|B}(s) \equiv h(s) \equiv g^h_{|B}(s) \quad \text{y} \quad f_{|}{}^{h'}_{B}(s) \equiv h'(s) \equiv g^{h'}_{|B}(s) \text{ en cada } s \notin B$$

Por lo tanto, mediante **P2,** $f^h_{|B} \succeq g^h_{|B}$ *sólo si* $f^{h'}_{|B} \succeq g^{h'}_{|B}$

Observe que P2 dice exactamente que $f \succeq g$ dado que B esté bien definido. Para comprobarlo, tomemos f y g' arbitrariamente. Digamos que $h = f$ y que $h' = g'$. Claramente, $f = f^h_{|B}$ y $g' = g^{h'}_{|B}$. Más aún, las condiciones en P2 definen f' y g como $f' = f^{h'}_{|B}$ y $g = g^h_{|B}$. De ahí, la conclusión de P2, "si $f \succeq g$, entonces $f' > g'$", es lo mismo que "si f $f^h_{|B} \succeq g^h_{|B}$, entonces $f^{h'}_{|B} \succeq g^{h'}_{|B}$.

Ejercicio 1 *Demuestre que el enunciado informal del principio de certidumbre es formalmente cierto: dado cualquier $f_1, f_2 \in F$, y cualquier $B \subseteq S$,*

$$[(f_1 \succeq f_2 \text{ dado } B) \text{ y } (f_1 \succeq f_2 \text{ dado } S\backslash B)] \Rightarrow [f_1 \succeq f_2].$$

[Sugerencia: defina $f := f_1 = f^{f_1}_{1|B} = f^{f_1}_{1|S\backslash B}$, $g' := f_2 = f^{f_2}_{2|B} = f^{f_2}_{2|S\backslash B}$, $f' := f^{f_2}_{1|B} = f^{f_1}_{2|S\backslash B}$ y $g := f^{f_1}_{2|B} = f^{f_2}_{1|S\backslash B}$ *Observe que no es necesario invocar a P2 (explícitamente).]*

Recuerde que nuestro objetivo es desarrollar una teoría que relacione las preferencias sobre los actos con consecuencias inciertas con las preferencias sobre las consecuencias. (La relación de preferencia $\succeq$ sobre F se amplía a Z incrustando Z en F como actos constantes. Esto es, decimos que $x \succeq x'$ *sólo si* $f \succeq f'$ donde f y f' son actos constantes que toman valores x y x', respectivamente). El siguiente postulado hace esto para las preferencias condicionales:

P 3 Dado cualquier f, $f' \in F$, $x, x' \in Z$, y $B \subset S$, *si* $f \equiv x$, $f' \equiv x'$, *y* $B \neq \phi$, *entonces*

$$f \succeq f' \text{ dado } B \iff x \succeq x'.$$

Para $B = S$, P3 es bastante trivial, cuestión de definición de una consecuencia como acto constante. Cuando $\boldsymbol{B} \neq S$, P3 es necesario como postulado independiente. Como las preferencias condicionales se definen fijando los resultados de los actos al mismo acto por defecto cuando el evento no ocurre, y dos actos constantes distintos no pueden tomar el mismo valor.

Cómo representar creencias con probabilidades de calidad. Queremos determinar las creencias de nuestros agentes incrustadas en $\succeq$. Hacia este extremo, dados cualesquiera dos eventos *A* y *B,* deseamos determinar qué evento nuestro agente cree más probable. Para ello, nos permitimos tomar dos consecuencias cualquiera $x, x', \in Z$ con $x \succ x'$. Se pide a nuestro agente que escoja entre dos apuestas (actos) f_A y f_B con

$$f_A(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \in A \\ x' & \text{de otro modo} \end{cases}, \qquad (3)$$

$$f_B(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \in B \\ x' & \text{de otro modo} \end{cases}.$$

Si nuestro agente prefiere f_A a f_B, podemos inferir que cree que el evento *A* es más probable que el evento *B,* ya que prefiere obtener el "premio" cuando *A* suceda, en lugar de cuando suceda *B*.

Definición 5. *Tomemos cualquier* $x, x' \in Z$ *con* $x \succ x'$. *Dado cualquier* $A, B \subseteq S$, *decimos que A* es al menos tan probable como *B (y escribimos* $A \succeq$ B) *si y sólo si* $f_A \succeq f_B$, *donde* f_A *y* f_B *definidos por (3).*

Queremos asegurarnos que esto nos da creencias bien definidas. Esto es, no debería ocurrir que, cuando utilicemos cierto *x* y *x',* deduzcamos que el agente piensa que *A* es estrictamente más probable que *B,* pero cuando utilizamos otro *y* e *y',* deducimos que piensa que *B* es estrictamente más probable que A. Nuestra siguiente suposición garantiza que $\succeq$ está bien definido.

P 4 *Dado cualquier* $x, x', , y, y' \in Z$ *con* $x \succ x'$ y $y \succ y'$, *defina* f_A, f_B, g_A, g_B *mediante*

$$f_A(s) = \begin{cases} x & \textit{si } s \in A \\ x' & \textit{de otro modo} \end{cases}, \quad g_A(s) = \begin{cases} y & \textit{si } s \in A \\ y' & \textit{de otro modo} \end{cases}$$
$$f_B(s) = \begin{cases} x & \textit{si } s \in B \\ x' & \textit{de otro modo} \end{cases}, \quad g_B(s) = \begin{cases} y & \textit{si } s \in B \\ y' & \textit{de otro modo} \end{cases}.$$

Entonces,

$$f_A \succeq f_B \iff g_A \succeq g_B.$$

Por último, nos aseguramos que podemos hallar x y x' con $x \succ x'$:

P 5 *Existe cierto $x, x' \in Z$ tal que $x \succ x'$.*

Ahora tenemos una relación bien definida $\dot{\succeq}$ que determina cuál de los dos eventos es más probable. Resulta que, $\dot{\succeq}$ es una *probabilidad cualitativa,* definida como sigue:

Definición 6. *Una relación $\dot{\succeq}$ entre los eventos se dice que es una probabilidad cualitativa si y sólo si*

1. $\dot{\succeq}$ es completa y transitiva;

2. dado cualquier $B, C, D \subset S$ con $B \cap D = C \cap D = \phi$, tenemos

$$B \dot{\succeq} C \iff B \cup D \dot{\succeq} C \cup D;$$

3. $B \dot{\succeq} \emptyset$ para cada $B \subset S$ y $S \dot{\succ} \emptyset$.

Ejercicio 2. *Demuestre que, conforme a los postulados P1-P5, la relación $\dot{\succeq}$ definida en* *la Definición 5 es una probabilidad cualitativa.*

Cómo cuantificar las evaluaciones de probabilidad cualitativas. Savage utiliza medidas de probabilidad *finitamente aditivas sobre el sigma-álgebra discreto:*

Definición 7. *Por una medida de probabilidad*, *entendemos una función* $p : 2^S \rightarrow [0, 1]$

con

1. si $B \cap C = \phi$, *entonces* $p(B \cup C) = p(B) + p(C)$, *y*

2. $p(S) = 1$.

Nos gustaría representar nuestra probabilidad cualitativa $\dot{\succeq}$ con una medida de probabilidad *p* (cuantitativa) en el sentido que

$$B \dot{\succeq} C \iff p(B) \geq p(C) \qquad \forall B, C \subseteq S. \tag{QPR}$$

Ejercicio 3. *demuestre que, si una relación* $\dot{\succeq}$ *se puede representar mediante una medida de probabilidad, entonces* $\dot{\succeq}$ *debe ser una probabilidad cualitativa.*

Cuando *S* es finito, como $\dot{\succeq}$ es completo y transitivo, por el Teorema 2, se puede representar mediante cierta función *p*, pero puede que no existiese dicha función que satisfaga la condición 1 en la definición de la medida de probabilidad. Es más, *S* es típicamente infinito. (Incidentalmente, la teoría que sigue requiere que *S* sea infinito).

Nos interesan las preferencias que tiene en cuenta un agente que evalúa los actos con respecto a su utilidad esperada, utilizando la función de utilidad sobre *Z* y la medida de probabilidad sobre *S* que tiene en mente. Nuestra tarea en este punto es hallar qué probabilidad $p(B)$ asigna a un evento arbitrario *B*. Imagínese que le preguntamos a esta persona si $p(B) \geq 1/2$. Dependiendo de su sinceridad, determinamos si $p(B) \in [1/2)$ o $p(B) \in [0, 1/2, 1]$. Dado el intervalo, preguntamos si $p(B)$ está en la mitad superior o en la mitad inferior de este intervalo, y según su respuesta, obtenemos un intervalo más pequeño que contiene $p(B)$. Lo repetimos *ad infinitum*. Como la duración del intervalo a la iésima iteración es $1/2^n$, sabemos $p(B)$ al final. Por ejemplo, digamos que $p(B) =$ 0,77. Primero preguntamos si $p(B) \geq 1/2$. Dice que sí. Ahora preguntamos si $p(B) \geq$ 3/4. Dice que sí. Entonces preguntamos si $p(B) \geq 7/8$. Dice que no. Ahora, preguntamos si *p (B)* ≥ 13/16 = (3/4 + 7/8) /2. Dice que no otra vez. Ahora preguntamos si *p (B)* > 25/32 = (3/4 + 7/8) /2. Dice que no. Ahora preguntamos si *p (B)* ≥ 49/64. Ahora dice que si. A estas alturas ya sabemos que 49/64≅0,765 ≤ *p (B)* < 25/32≅0,781. Cuanto más preguntamos, mejor respuesta obtenemos.

Esto es lo que haremos, si bien es cierto que en un escenario muy abstracto. Supongamos que *S es divisible infinitamente conforme a* $\dot{\succsim}$. Esto es, S tiene

- una partición $$\{D_1^1, D_1^2\} \text{ con } D_1^1 \cup D_1^2 = S \text{ y } D_1^1 \dot{\sim} D_1^2,$$
- una partición $\{D_2^1, D_2^2, D_2^3, D_2^4\}$ con $D_2^1 \cup D_2^2 = D_1^1,\ D_2^3 \cup D_2^4 = D_1^2$, y $D_2^1 \dot{\sim} D_2^2 \dot{\sim} D_2^3 \dot{\sim} D_2^4$,
- $\vdots$
- una partición $\left\{D_n^1, \cdots, D_n^{2^n}\right\}$ con $D_n^1 \cup D_n^2 = D_{n-1}^1, \ldots, D_n^{2k-1} \cup D_n^{2k} = D_{n-1}^k, \ldots,$

  y $D_n^1 \dot{\sim} \cdots \dot{\sim} D_n^{2^n},$
- $\vdots$

ad infinitum.

S			
D_1^1		D_1^2	
D_2^1	D_2^2	D_2^3	D_2^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ejercicio 4. *Comprueba que, si* $\dot{\succsim}$ *está representada por cierta p, entonces debemos tener p (*D_n^r*) = 1/2*^{n} .

Dado cualquier evento *B,* para cada *n,* defina

$$k(n, B) = \max\left\{r \middle| B \dot{\succsim} \bigcup_{i=1}^{r} D_n^i\right\},$$

donde utilizamos la convención de que $\cup_{i=1}^{r} D_n^i = \emptyset$ siempre que *r < 1*. Defina

$$p(B) := \lim_{n\to\infty} \frac{k(n, B)}{2^n}. \tag{4}$$

Compruebe que $k(n, B)/2^n \in [0, 1]$ es no decreciente en n. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}$, $k(n, B)/2^n$ está bien definido.

Como $\dot{\succeq}$ es transitivo, si $B \dot{\succeq} C$, entonces $k(n, B) \geq k(n, C)$ para cada n, dando como resultado $p(B) \geq p(C)$. Esto prueba la $\Rightarrow$ parte de (QPR) conforme a la suposición de que S es divisible infinitamente. La otra parte ($\Leftarrow$) está implicada por la siguiente asunción:

P 6' *Si $B \dot{\succ} C$, entonces existe una partición finita $\{D^1, \ldots, Dn\}$ de S tal que $B \dot{\succ} C \cup D^r$ para cada r.*

Conforme a P1-P5, P6' también implica que S es infinitamente divisible. (Ver la definición de "ajustado" y Teoremas 3 y 4 en Savage.) Por lo tanto, P1-P6' supone (QPR), donde p queda definido por (4).

Ejercicio 5. *Compruebe que, si $\dot{\succeq}$ está representado por cierto p', entonces*

$$\frac{k(n, B)}{2^n} \leq p'(B) < \frac{k(n, B) + 1}{2^n}$$

en cada B. De ahí, si p y p' representan $\dot{\succeq}$, entonces $p = p'$.

El postulado 6 será de alguna manera más fuerte que P6'. (También se utiliza para obtener el axioma de continuidad de Von Neumann y Morgenstern.)

P 6 *Dado cualquier $x \in Z$, y cualquier $g, h \in F$ con $g \succ h$, existe una partición $\{D^1, \ldots, D^n\}$ de S tal que*

$$g \succ h_i^x \text{ y } \quad g_i^x \succ h$$

para cada $i \leq n$ donde

$$h_i^x(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \in D^i \\ h(s) & \text{de otro modo} \end{cases} \text{ y } \quad g_i^x(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \in D^i \\ g(s) & \text{de otro modo} \end{cases}.$$

Tomemos $g = f_B$ y $h = f_c$ (definidos en (3)) para obtener P6'.

Teorema 5. *Conforme a P1-P6, existe una medida de probabilidad única p tal que*

$$B \dot{\succeq} C \Leftrightarrow p(B) \geq p(C) \qquad \forall B, C \subseteq S. \qquad (QPR)$$

En el capítulo 5, Savage demuestra que, cuando Z es finito, los Postulados P1-P6 implican los Axiomas 2-4 de Von Neumann y Morgenstern –así como sus suposiciones de creación de modelos tales que sólo las distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de premios importan. De este modo, obtiene el siguiente Teorema:[3]

Teorema 6. *Suponga que Z es finito. Conforme a P1-P6, existe una función de utilidad u: $Z \rightarrow R$ y una medida de probabilidad $p : 2^S \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$f \succeq g \iff \sum_{z \in Z} p(\{s | f(s) = z\}) u(z) \geq \sum_{z \in Z} p(\{s | g(s) = z\}) u(z)$$

para cada $f, g \in F$.

[3]Para el conjunto de premios infinito Z, necesitamos la versión infinita del principio de certidumbre:

P 7. *Si tenemos $f \succeq g(s)$ dado B para cada $s \in B$, entonces $f \succeq g$ dado B. Del mismo modo, si $f(s) \succeq g$ dado B para cada $s \in B$, entonces $f \succeq g$ dado B.*

Conforme a P1-P7, obtenemos la representación de la utilidad esperada para casos generales.