

# Teoría de precios

MIT 14.126. Otoño 2001

1

## Mapa de ruta

- ◆ Doctrina tradicional: basada en la convexidad
- ◆ Esclarecimiento de tres grandes ideas
  - Convexidad: precios y dualidad
  - Orden: estática comparativa, reacciones positivas, complementos estratégicos
  - Funciones de valor: diferenciabilidad y caracterizaciones, teoremas de equivalencia de incentivos

2

## Convexidad y teoría de precios tradicional

## Convexidad en cada paso

- ◆ Las condiciones de convexidad locales o globales implican
  - Existencia de precios
  - Estática comparativa, uso de *condiciones de segundo orden*
  - Representaciones duales, conducentes a...
    - ◆ Lema de Hotelling
    - ◆ Lema de Shephard
    - ◆ Principio de Samuelson-LeChatelier
- ◆ La convexidad está en la base de la idea sobre la que descansa el análisis en su totalidad.

## Principio Samuelson-LeChatelier

- ◆ Idea: la demanda a largo plazo es más elástica que la demanda a corto plazo.
- ◆ Formalmente, el enunciado se aplica a las funciones de demanda uniforme para cambios de precio lo bastante pequeños.
- ◆ Sea  $p=(p_x, w, r)$  el vector actual de precios de salida y de entrada y sea  $p'$  el vector de precio a largo plazo que determinó la elección actual de una entrada fija, p.ej. capital.
- ◆ Teorema: si la demanda de trabajo es diferenciable en este punto, entonces:

$$\left. \frac{\partial l^L}{\partial w} \right|_p \leq \left. \frac{\partial l^S}{\partial w} \right|_{p, p'=p} \leq 0$$

5

## Prueba de Varian

- ◆ Definición de las funciones de beneficio a corto y largo plazo:

$$\pi^L(p) = \max_{k, l} p_x f(k, l) - wl - rk$$

$$\pi^S(p, p') = \max_l p_x f(k^*(p'), l) - wl - rk^*(p')$$

- ◆ Los beneficios a largo plazo son mayores:

$$\pi^L(p) \geq \pi^S(p, p') \text{ for all } p, p' \text{ and } \pi^L(p) = \pi^S(p, p)$$

- ◆ Por tanto, la demanda a largo plazo ha de ser más elástica:

$$\left. \frac{\partial^2 \pi^L}{\partial w^2} \right|_p \geq \left. \frac{\partial^2 \pi^S}{\partial w^2} \right|_{p, p'=p} \geq 0 \text{ and } \left. \frac{\partial l^L}{\partial w} \right|_p \leq \left. \frac{\partial l^S}{\partial w} \right|_{p, p'=p} \leq 0$$

6

## Un sólido "contraejemplo"

- ◆ El conjunto de producción consiste en la envolvente convexa de estos 3 puntos, con libre disposición:

Capital	Trabajo	Producción
0	0	0
1	1	1
0	2	1

- ◆ Fije el precio de producción en 9 y el precio de capital en 3, y suponga que el salario aumenta de  $w=2$  a  $w=5$ . Las demandas son:  
 $l^L(2) = 2, l^S(5, 2) = 0, l^L(5) = 1$
- ◆ *La demanda de trabajo a largo plazo cae menos que la de corto.*
- ◆ Robustez: ajustar los números o uniformizar el conjunto de producción no altera esta conclusión.

## Doctrina alternativa

Esclarecimiento de tres ideas

6

## Separación de elementos

- ◆ Convexidad
  - Prueba de la existencia de precios
  - Representaciones duales de conjuntos convexos
  - Representaciones duales de óptimos
- ◆ Orden
  - Estática comparativa
  - Reacciones positivas (LeChatelier principle)
  - Complementos estratégicos
- ◆ Envelopes
  - Útiles con funciones duales
  - Optimizaciones de varias etapas
  - Caracterización de las rentas de información

9

## Cuadro de invariancia

Conclusiones sobre $\max_{x \in S} f(x, t)$	Transformaciones de la variable de elección
Existen precios ("Lagrangian") de apoyo	Lineal (conserva la convexidad)
Las elecciones óptimas aumentan en parámetro	Conserva el orden
El cambio óptimo a largo plazo es mayor, misma dirección	Conserva el orden
Fórmula derivativa de la función de valor $V'(t) = f_2(x^*(t), t)$	Uno a uno

10

## Sólo convexidad

## Aplicaciones puras de la convexidad

- ◆ Teorema del hiperplano separador
  - Existencia de precios
  - Existencia de probabilidades
  - Existencia de representaciones duales
    - ◆ Ejemplo: teorema de Bondavera-Shapley
    - ◆ Ejemplo: dualidad de programación lineal
- ◆ Supuestas aplicaciones de la dualidad
  - Lema de Hotelling
  - Lema de Shephard

11

## Teorema del hiperplano separador

- ◆ Teorema. Sea  $S$  un conj. convexo no vacío y cerrado en  $\mathbb{R}^N$  y  $x \notin S$ . Entonces existe  $p \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$p \cdot x > \max\{p \cdot y \mid y \in S\}$$

- ◆ Dem. Sea  $y \in S$  el punto más cercano en  $S$  a  $x$ . Defina

$$p = (x - y) / \|x - y\|$$

- Demuestre que tal punto  $y$  existe.
- Demuestre que  $p \cdot x > p \cdot y$ .
- Demuestre que si  $z \in S$  y  $p \cdot z > p \cdot y$ , entonces para cierto positivo pequeño  $t$ ,  $tz + (1-t)y$  está más cerca de  $x$  que  $y$ .

13

## Caracterizaciones duales

- ◆ Corolario. Si  $S$  es un conjunto convexo cerrado, entonces  $S$  es la intersección de los medios espacios cerrados que lo contienen.

- Si definimos

$$\pi(p) = \max\{p \cdot x \mid x \in S\}$$

- debe ser cierto que

$$S = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^N} \{x \mid p \cdot x \leq \pi(p)\}$$

14

## Convexidad y cuantificación

- ◆ Las siguientes condiciones en un conjunto  $S$  en  $\mathbb{R}^N$  son equivalentes.

- $S$  es convexo
- Por cada  $x$  en el límite de  $S$ , hay un hiperplano de apoyo para  $S$  a través de  $x$ .
- Por cada función objetiva cóncava  $f$  existe cierto  $\lambda$  tal que los maximizadores de  $f(x)$  sujetos a  $x \in S$  sean maximizadores de  $f(x) + \lambda \cdot x$  sujeto a  $x \in \mathbb{R}^N$ .

## Orden exclusivamente

## Orden, conceptos y resultados

- ◆ Definiciones relacionadas con el orden
- ◆ Problemas de optimización
  - Estática comparada para objetivos separables
  - Principio de LeChatelier mejorado
  - Estática comparada con compensaciones no separables
- ◆ Equilibrio con complementos estratégicos
  - Dominancia y equilibrio
  - Estática comparada
  - Aprendizaje adaptable
  - Principio de equilibrio de LeChatelier

17

## Dos aspectos de los complementos

- ◆ Restricciones
  - Las actividades son complementarias si hacer una permite hacer la otra...
  - ...o al menos no impide hacerla.
    - ◆ Esta condición se describe mediante conj. que son submallas
- ◆ Pagos
  - Las actividades son complementarias si al hacer una resulta un poco más rentable hacer la otra...
    - ◆ Esto se describe mediante pagos supermodulares
  - ...o al menos la actividad no pasa de ser rentable a no serlo
    - ◆ Esto se describe mediante pagos que satisfacen una condición de cruce única.

18

## Definiciones: malla

- ◆ Dado un conjunto parcialmente ordenado  $(X, \geq)$ , defina
  - The "join":  $x \vee y = \inf \{z \in X \mid z \geq x, z \geq y\}$ .
  - The "meet":  $x \wedge y = \sup \{z \in X \mid z \leq x, z \leq y\}$ .

- ◆  $(X, \geq)$  es una malla si

$$(\forall x, y \in X) x \wedge y, x \vee y \in X$$

- ◆ Ejemplo:  $X = \mathbf{R}^N$ ,

$$x \geq y \text{ if } x_i \geq y_i, i = 1, \dots, N$$

$$(x \wedge y)_i = \min(x_i, y_i); i = 1, \dots, N$$

$$(x \vee y)_i = \max(x_i, y_i); i = 1, \dots, N$$

19

## Definiciones, 2

- ◆  $(X, \geq)$  es una malla completa si por cada subconjunto no vacío  $S$ , existe en  $X$  un límite inferior mayor  $\inf(S)$  y al menos un límite superior  $\sup(S)$ .
- ◆ Una función  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  es *supermodular* si
$$(\forall x, y \in X) f(x) + f(y) \leq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$$
- ◆ Una función  $f$  es *submodular* si  $-f$  es supermodular.

20

## Definiciones, 3

◆ Dados dos subconj.  $S, T \subset X$ , "S es *tal alto como* T,"

expresado  $S \geq T$ , significa

$$[x \in S \text{ y } y \in T$$

$$\Rightarrow [x \vee y \in S \text{ and } x \wedge y \in T$$

◆ Una función  $x^*$  es "isótona" (o "débilmente creciente") si

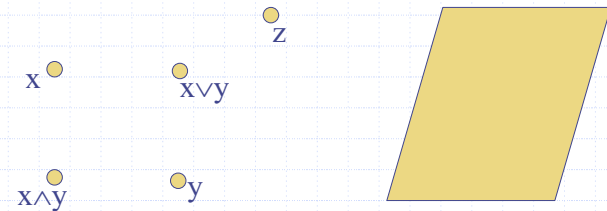
$$t \geq t' \Rightarrow x^*(t) \geq x^*(t')$$

- "No decreciente" no se usa porque...

◆ Un conjunto S es una "submalla" si  $S \geq S$ .

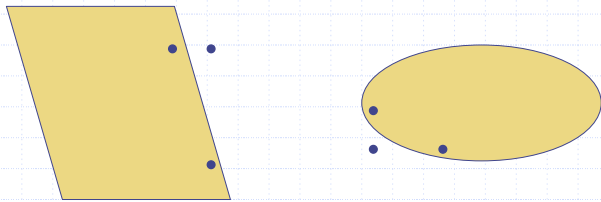
21

## Submallas de $\mathbf{R}^2$



22

## No submallas



◆ Convexidad, orden y topología son conceptos independientes. Sin embargo, en  $\mathbf{R}$ , éstos coinciden

- Topología:  $S = \text{conj. compacto con límite } \{a, b\}$
- Convexidad:  $S = \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid \alpha \in [0, 1]\}$
- Orden:  $S = [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

23

## Supermodularidad por pares

◆ Teorema (Topkis). Sea  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ . Los siguientes son equivalentes:

- $f$  es supermodular
- Para todo  $n \neq m$  y  $x_{-nm}$ , la restricción  $f(\cdot, \cdot, x_{-nm}): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  es supermodular.

24

## Demostración de la supermodularidad por pares

- ◆  $\Rightarrow$  Esta dirección se deduce de la definición.
- ◆  $\Leftarrow$  Dado  $x \neq y$ , suponga, en aras de la simplicidad notacional, que

$$x_i = \begin{cases} \max(x_i, y_i) & \text{for } i = 1, \dots, n \\ \min(x_i, y_i) & \text{for } i = n+1, \dots, N \end{cases}$$

- ◆ Entonces,

$$\begin{aligned} f(x \vee y) - f(y) &= \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_N) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_N)) \\ &\geq \sum_{i=1}^n [f(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \\ &\quad - f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_N)] \\ &= f(x) - f(x \wedge y) \end{aligned}$$

**QED**

25

## Submallas por pares

- ◆ Teorema (Topkis). Sea  $S$  una submalla de  $\mathbb{R}^N$ . Defina

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (\exists z \in S) x_i = z_i, x_j = z_j\}$$

$$\text{Así, } S = \bigcap_{i,j} S_{ij}$$

- ◆ Coment. Por tanto, una submalla se puede expresar como una colección de restricciones sobre pares de argumentos. En especial, restricciones no descomponibles como

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

nunca pueden describir en una submalla.

26

## Demostración de submallas por pares

Es inmediato que  $S \subset \bigcap_{i,j} S_{ij}$ . A la inversa,

suppose  $x \in \bigcap_{i,j} S_{ij}$ . Then,  $(\exists z^{ij} \in S) z_i^{ij} = x_i$  and  $z_j^{ij} = x_j$ .

Define  $z^j = \vee_j z^{ij} \in S$ . For all  $j$ ,  $z_i^j \geq x_j$ ,  $z_i^j = x_i$ .

So,  $z = \wedge_i z^i \in S$  satisfies  $z_i = x_i$  for all  $i$ .

**QED**

25

## Complementariedad

- ◆ Complementariedad/supermodularidad tienen caracterizaciones equivalentes:

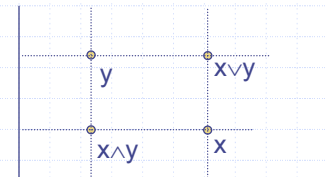
- Rendimiento marginal más alto  
 $f(x \vee y) - f(x) \geq f(y) - f(x \wedge y)$

- Segunda diferencia mezclada no negativa

$$[f(x \vee y) - f(x)] - [f(y) - f(x \wedge y)] \geq 0$$

- Para objetivos homogéneos, segunda derivada mezclada no negativa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0 \text{ for } i \neq j$$



26

## Teorema de monotonicidad

- ◆ Teorema (Topkis). Sea  $f: X \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función supermodular y defina

$$x^*(t) \equiv \operatorname{argmax}_{x \in S(t)} f(x, t).$$

Si  $t \geq t'$  y  $S(t) \geq S(t')$ , entonces  $x^*(t) \geq x^*(t')$ .

- ◆ Corolario. Sea  $f: X \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función supermodular y suponga que  $S(t)$  es isótono. Entonces, por cada  $t$ ,  $S(t)$  y  $x^*(t)$  son submallas.
- ◆ Dem. del corolario. Trivia.,  $t \geq t'$  y  $S(t) \geq S(t')$   $x^*(t) \geq x^*(t')$ . **QED**

29

## Demostración del teorema de monotonicidad

- ◆ Suponga que  $f$  es supermodular y que  $x \in x^*(t), x' \in x^*(t'), t > t'$ .
- ◆ Ent.,  $(x \wedge x') \in S(t'), (x \vee x') \in S(t)$   
 $f(x, t) \geq f(x \vee x', t)$  y  $f(x', t') \geq f(x \wedge x', t')$ .
- ◆ Si algunas de estas desigualdades son estrictas, entonces sus sumas contradicen la supermodularidad:  
 $f(x, t) + f(x', t') > f(x \wedge x', t') + f(x \vee x', t).$

**QED**

30

## Necesidad de objetivos separables

- ◆ Teorema (Milgrom). Sea  $f: \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función supermodular y suponga que  $S$  es una submalla.

$$\text{Sea } x_{g,S}^*(t) \equiv \operatorname{argmax}_{x \in S} f(x, t) + \sum_{n=1}^N g_n(x_n).$$

- ◆ Entonces, los siguientes son equivalentes:

- $f$  es supermodular
- P. todo  $g_1, \dots, g_N: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$   $x_{g,S}^*(t)$  es isótono.

- ◆ Coment.:

- Este es un teorema de "monotonicidad robusta".
- La función  $g(x) \equiv \sum g_n(x_n)$  es "modular":  
 $g(x) + g(y) = g(x \wedge y) + g(x \vee y).$

31

## Demostración

- ◆  $\Rightarrow$  Se sigue del teorema de Topkis
- ◆  $\Leftarrow$  Basta para demostrar la "supermodularidad de pares." Por tanto, es suficiente para demostrar que la supermodularidad es necesaria cuando  $N=2$ . Vemos el caso de dos variables de elección; el tratamiento de una variable de elección y de un parámetro es similar.
- ◆ Let  $x, y \in \mathfrak{R}^2$  be unordered:  $x_1 > y_1, x_2 < y_2$
- ◆ Sea 
$$g_i(z_i) = \begin{cases} -\infty & \text{if } z_i \notin \{x_i, y_i\} \\ f(x \wedge y) - f(x) & \text{if } z_i = x_i, i = 1 \\ f(x \wedge y) - f(y) & \text{if } z_i = y_i, i = 2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$
- ◆ If  $f(x) + f(y) > f(x \wedge y) + f(x \vee y)$ , then  $x_{g,S}^* = \{x, y, x \wedge y\}$  is not a sublattice, so  $\neg(x^*(t) \geq x^*(t))$ . **QED**

32

## Aplicación: teoría de producción

- ◆ Problema:

$$\max_{k,l} pf(k,l) - L(l,w) - K(k,r)$$

- ◆ Suponga que  $L$  es supermodular en el orden natural, por ejemplo,  $L(l,w) = wl$ .
  - Entonces,  $-L$  es supermodular cuando el orden en  $l$  se invierte.
  - $l^*(w)$  es no creciente en el orden natural.
- ◆ Si  $f$  es supermodular,  $k^*(w)$  es también no creciente.
  - Esto es, capital y trabajo son "complementos de la teoría de precios"
- ◆ Si  $f$  es supermodular con el orden inverso, entonces trabajo y capital son "sustitutos de la teoría de precios"

33

## Aplicación: decisiones de fijación de precios

- ◆ Un monopolio frente a la demanda  $D(p,t)$  produce a un coste de unidad  $c$ .

$$p^*(t) = \operatorname{argmax}_p (p - c)D(p,t)$$

$$= \operatorname{argmax}_{p > c} \log(p - c) + \log(D(p,t))$$

- ◆  $p^*(c,t)$  es siempre isótono en  $c$ . Es también isótono en  $t$  si  $\log(D(p,t))$  es supermodular en  $(p,t)$ , lo que es lo mismo que ser supermodular en  $(\log(p),t)$ , lo que significa que los aumentos en  $t$  hacen menos elástica la demanda:

$$\frac{\partial \log D(p,t)}{\partial \log(p)} \text{ no decreciente en } t$$

34

## Aplicación: teoría de la subasta

- ◆ El valor de una firma de obtener un artículo al precio  $p$  es  $U(p,t)$ , donde  $t$  es el tipo de firma. (La pérdida se normaliza en cero). Una puja  $p$  gana con probabilidad  $F(p)$ .
- ◆ Pregunta: podemos concluir que  $p(t)$  es no decreciente, sin conocer  $F$ ?

$$p_F^*(t) = \operatorname{argmax}_p U(p,t)F(p)$$

$$= \operatorname{argmax}_p \log(U(p,t)) + \log(F(p))$$

- ◆ Respuesta: Sí, si y sólo si  $\log(U(p,t))$  es supermodular.

--

## Demanda a largo plazo frente a corto

- ◆ Anotación. Sea  $I^S(w,w')$  la demanda a corto a corto plazo de trabajo cuando el salario actual es  $w$  y el que determina los ingresos fijos es  $w'$ .
- ◆ Si definimos  $w = w'$  en  $I^S$  nos da la demanda a largo plazo.
- ◆ Principio Samuelson-LeChatelier:

$$0 \geq I_1(w,w) \geq \frac{d}{dw} I(w,w).$$

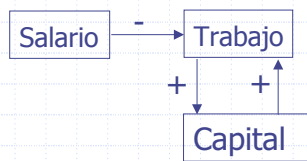
- que se puede enunciar de nuevo como:

$$0 \geq I_2(w,w).$$

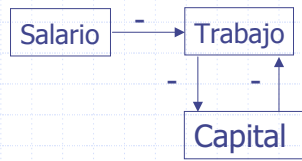
--

# Análisis Milgrom-Roberts

## Complementos



## Sustitutos



### Comentarios:

- Este análisis no presupone nada sobre la convexidad, la divisibilidad, etc.
- Para demandas uniformes, la simetría de la matriz de sustitución implica que, localmente, se aplica uno de los dos casos anteriores.

37

# Principio LeChatelier mejorado

◆ Sea  $H(x, y, t)$  supermodular y  $S$  una submalla.

◆ Sea  $(x^*(t), y^*(t)) = \max \arg \max_{(x, y) \in S} H(x, y, t)$

◆ Sea  $x^*(t, t') = \max \arg \max_{x \in \{x' | (x', y^*(t')) \in S\}} H(x, y^*(t'), t)$

◆ Teorema (Milgrom & Roberts).  $x^*$  es isótono en ambos argumentos. Sobre todo, si  $t > t'$ , entonces

$$x^*(t) = x^*(t, t) \geq x^*(t, t') \geq x^*(t', t') = x^*(t')$$

38

# Demostración

- Por el teorema de Topkis,  $y^*(t) \geq y^*(t')$
- Si aplicamos de nuevo el mismo teorema, para todo  $t, t'' > t'$

$$x^*(t', t') = \max \arg \max_{x \in \{x' | (x', y^*(t')) \in S\}} H(x, y^*(t'), t')$$

$$\leq x^*(t, t') = \max \arg \max_{x \in \{x' | (x', y^*(t')) \in S\}} H(x, y^*(t'), t)$$

$$\leq x^*(t, t'') = \max \arg \max_{x \in \{x' | (x', y^*(t'')) \in S\}} H(x, y^*(t''), t)$$

- Si definimos  $t=t''$  completamos la demostración.

39

# Demanda a largo plazo frente a corto

- Teorema. Sea  $w > w'$ . Supongamos que capital y trabajo **son complementos**, i.e.,  $f(k, l)$  es supermodular en el orden natural. Si la demanda es de valor único en  $w$  y  $w'$ , entonces

$$I^S(w, w) \leq I^S(w, w') \leq I^S(w', w')$$

- Teorema. Sea  $w > w'$ . Supongamos que capital y trabajo **son sustitutos**, i.e.,  $f(k, l)$  es supermodular cuando se da al capital su orden inverso. Si la demanda es de valor único en  $w$  y  $w'$ , entonces

$$I^S(w, w) \leq I^S(w, w') \leq I^S(w', w')$$

40

## Objetivos no separables

- ◆ Considere un problema de optimización con “intercambios” entre sus efectos.

- $x$  es la variable de elección con valor real
- $B(x)$  es la “función de producción de beneficios”
- La elección óptima es

$$x_B^*(t) = \operatorname{argmax}_{x \in X} \pi(x, B(x), t)$$

41

## Teorema de la monotonicidad robusta

- ◆ Defina:  $x_B^*(t) = \operatorname{argmax}_{x \in X} \pi(x, B(x), t)$

- ◆ Teorema. Suponga que  $\pi$  es continuamente diferenciable y  $\pi_2$  es 0 en cualquier punto. Entonces:

$$\left[ (\forall x, y) \frac{\pi_1(x, y, t)}{|\pi_2(x, y, t)|} \text{ aumenta en } t \right]$$

$\Rightarrow$  [For all  $B$ ,  $x_B^*(t)$  es isótono]

$$\Rightarrow \left[ (\forall x, y) \frac{\pi_1(x, y, t)}{|\pi_2(x, y, t)|} \text{ es no decreciente en } t \right]$$

42

## Aplicación: decisiones de ahorro

- ◆ Ahorrando  $x$ , se puede consumir  $F(x)$  en periodo 2.

$$V(w) = \max_{0 \leq x \leq w} U(w - x, F(x))$$

$$x_F^*(w) = \max \operatorname{argmax}_{0 \leq x \leq w} U(w - x, F(x))$$

- ◆ Defina:  $\pi(x, y, t) = U(t - x, y)$
- ◆ Análisis. Si  $MRS_{xy}$  aumenta con  $x$ , los ahorros óptimos son isótonos en riqueza:

$$\left[ \frac{U_1(x, y)}{U_2(x, y)} \text{ aumentando en } x \right] \Rightarrow x_F^*(w) \text{ isótono}$$

- ◆ Se trata de la misma condición que la hallada en la teoría de precios, donde  $F$  está restringido para ser lineal. Aquí,  $F$  no está restringido.
  - También se aplica al modelo consumo-ahorro de Koopmans.

..

## Introducción a los juegos supermodulares

..

## Formulación

- ◆ N jugadores (se admite infinito)
- ◆ Los conj. de estrategia  $X_n$  son submallas completas
  - $\underline{x}_n = \min X_n, \bar{x}_n = \max X_n$
- ◆ Las funciones de pago  $U_n(x)$  son
  - Continuas
  - "Supermodulares con diferencias isótonas"
    - $(\forall n)(\forall x_n, x'_n \in X_n)(\forall x_{-n} \geq x'_{-n} \in X_{-n})$
    - $U_n(x) + U_n(x') \leq U_n(x \wedge x') + U_n(x \vee x')$

45

## Modelos de oligopolio de Bertrand

- ◆ Oligopolio lineal/supermodular:
  - Demanda:  $Q_n(x) = A - ax_n + \sum_{j \neq n} b_j x_j$
  - Benef:  $U_n(x) = (x_n - c_n)Q_n(x)$
  - $\frac{\partial U_n}{\partial x_m} = b_m(x_n - c_n)$  que aumenta en  $x_n$
- ◆ Oligopolio Log-supermodular:
  - $\log U_n(x) = \log(x_n - c_n) + \log Q_n(x)$
  - $\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_m \partial x_n} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \log Q_n(x)}{\partial \log x_n \partial \log x_m} \geq 0$

46

## Duopolio lineal de Cournot

- ◆ Demanda inversa:  $P(x) = A - x_1 - x_2$ 
  - $U_n(x) = x_n P(x) - C_n(x_n)$
  - $\frac{\partial U_n}{\partial x_m} = -x_n$
- ◆ El duopolio lineal de Cournot (pero no el oligopolio mas general) es supermodular si el conj. estratégico de un jugador se da a la inversa de su orden habitual.

--

## Análisis de juegos supermodulares

- ◆ Funciones de mejor réplica extremas
  - $B_n(x) = \max_{x'_n \in X_n} (U_n(x'_n, x_{-n}))$
  - $b_n(x) = \min_{x'_n \in X_n} (U_n(x'_n, x_{-n}))$
  - Según el teorema de Topkis Teorema, son funciones isótonas.
- ◆ Lema :
  - $\neg[x_n \geq b_n(x)] \Rightarrow [x_n \text{ is strictly dominated by } b_n(x) \vee x_n]$
- ◆ Prueba If  $\neg[x_n \geq b_n(x)]$ , entonces
  - $U_n(x_n \vee b_n(x), x_{-n}) - U_n(x_n, x_{-n}) \geq U_n(b_n(x), x_{-n}) - U_n(x_n \wedge b_n(x), x_{-n}) > 0$

--

## Racionalizabilidad y equilibrio

- ◆ Teorema (Milgrom y Roberts): Las estrategias racionalizables más pequeñas para los jugadores vienen dadas por:

$$\underline{z} = \lim_{k \rightarrow \infty} b^k(\underline{x})$$

Del mismo modo las estrategias racionalizables más grandes vienen dadas por:

$$\bar{z} = \lim_{k \rightarrow \infty} B^k(\bar{x})$$

Ambos son perfiles de equilibrio Nash.

49

## Demostración

- ◆ Observe que  $b^k(\underline{x})$  es una sucesión isótona acotada, de modo que su límite  $z$  existe.
- ◆ Por continuidad de pagos, su límite es un punto fijo de  $b$ , y por tanto un equilibrio de Nash.
- ◆ Una estrategia menor que  $z_n$  es menor que cierto  $b_n^k(\underline{x})$  y por tanto se borra durante la supresión iterada de las estrategias dominadas.
- ◆ **QED**

50

## Estadísticas comparativas

- ◆ Teorema. (Milgrom y Roberts) Considere una familia de juegos supermodulares con pagos parameterizados por  $t$ . Suponga que para todo  $n$ ,  $x_n$ ,  $U_n(x_n, x_{-n}; t)$  es supermodular en  $(x_n, t)$ . Entonces

$\bar{z}(t), \underline{z}(t)$  son isótonos.

- ◆ Prueba. Según el teorema de Topkis,  $b_i^k(x)$  es isótono en  $t$ . Por tanto, si  $t > t'$ ,

$$b_i^k(x) \geq b_i^k(x')$$

$$\underline{z}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_i^k(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} b_i^k(x') \geq \underline{z}(t')$$

e igualmente para  $\bar{z}$ . **QED**

--

## Aprendizaje adaptativo

- ◆ El comportamiento del jugador  $n$  se denomina *coherente con el aprendizaje adaptativo* si por cada fecha  $t$  hay una  $t'$  tras la cual  $n$  no juega una estrategia que sea estrictamente dominada en el juego en el que otros sólo pueden jugar las estrategias que hay jugado desde la fecha  $t$ .
- ◆ Teorema (Milgrom y Roberts). En un juego de estrategia finita, si el comportamiento de cada jugador es coherente con el aprendizaje adaptativo, al final todos juegan sólo estrategias racionalizables.

--

## Principio LeChatelier de equilibrio

### ◆ Formulación

- Considere una familia parametrizada de juegos supermodulares con pagos parametrizados por  $t$ . Suponga que para todo  $n$ ,  $x_{-n}$ ,  $U_n(x_n, x_{-n}; t)$  es supermodular en  $(x_n, t)$ .
- Fijar la estrategia del jugador 1 en  $\underline{z}_1(t')$  induce un juego supermodular entre los jugadores restantes. Sea  $\underline{y}(t, t')$  el equilibrio de Nash más pequeño en el juego inducido, con  $\underline{y}_1(t, t') = \underline{z}_1(t')$ .

### ◆ Teorema.

- $t > t'$ ,  $\underline{z}(t) \geq \underline{y}(t, t') \geq \underline{z}(t')$  Si  $(\cdot, \cdot)$  es  $(\cdot, \cdot)$ .
- If  $t < t'$ , then  $\underline{z}(t) \leq \underline{y}(t, t') \leq \underline{z}(t')$ .

...y una conclusión similar se aplica al equilibrio máximo.

53

## Demostración

### ◆ Observe (ejercicio) que

$$\underline{z}(t) = \underline{y}(t, t), \underline{z}(t') = \underline{y}(t', t').$$

### ◆ Suponga que $t > t'$ .

- Según el teorema de estática comparativa,  $\underline{z}$  es isótono, así:  
$$\underline{z}(t) \geq \underline{z}(t').$$

- Por tanto, aplicando de nuevo el teorema anterior,  $\underline{y}$  es isótono, así que:

$$\underline{y}(t, t) \geq \underline{y}(t, t') \geq \underline{y}(t', t').$$

**QED**

54

## Funciones *envelope*

Basado en "Envelope Theorems for Arbitrary Choice Sets" por Paul Milgrom e Ilya Segal

## ¿Qué son los teoremas *envelope*?

- ◆ Los teoremas *envelope* tratan de las propiedades de la función de valor:  $V(t) \equiv \max_{x \in X} f(x, t)$
- ◆ Responden a preguntas sobre...
  - cuando  $V$  es diferenciable, diferenciable direccionalmente, Lipschitz, o **continuo absolutamente**.
  - cuando  $V$  satisface la fórmula *envelope*  
$$V'(t) = f_t(x, t) \text{ for } x \in x^*(t)$$
- ◆ Los teoremas *envelope* tradicionales asumen que el conjunto  $X$  es convexo y el objetivo  $f(\cdot, t)$  es cóncavo y diferenciable.

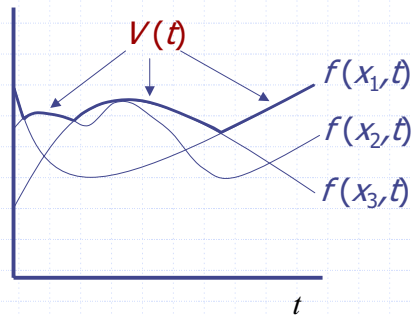
--

--

## Argumento intuitivo

◆ Cuando  $X = \{x_1, x_2, x_3\} \dots$

- $V$  es a dcha. e izda. diferenciable en todas partes
- Si  $f_t(x, t)$  es constante en  $x \in X^*(t)$ ,  $V$  es diferenciable en  $t$
- las fórmulas *envelope* se aplican para
  - ◆  $V'(t) = f_t(x^*(t), t)$
  - ◆  $V'(t+)$  and  $V'(t-)$



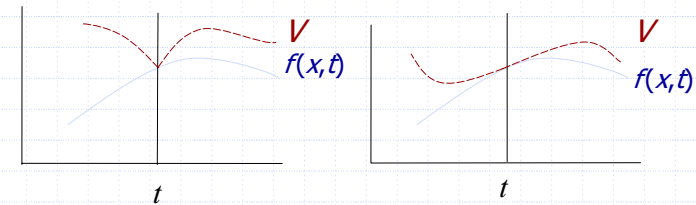
57

## Fórmula derivada *envelope*

◆ **Teorema 1.** Tomemos  $t \in [0, 1]$  y  $x \in X^*(t)$ , y supongamos que  $f_t(x, t)$  existe.

- Si  $t < 1$  y  $V'(t+)$  existen,  $V'(t+) \geq f_t(x, t)$ .
- Si  $t > 0$  y  $V'(t-)$  existen,  $V'(t-) \leq f_t(x, t)$ .
- Si  $t \in (0, 1)$  y  $V'(t)$  existen,  $V'(t) = f_t(x, t)$ .

◆ Demostración:



58

## Continuidad absoluta

◆ **Teorema 2(A).** Supongamos que:

- $f(x, \cdot)$  es diferenciable (o sólo absolutamente continuo) para todo  $x \in X$  con derivada (o densidad)  $f_t$ .
- existe una función integrable  $b(t)$  tal que  $|f_t(x, \cdot)| \leq b(t)$  para todo  $x \in X$  y casi todo  $t \in [0, 1]$ .

Entonces  $V$  es absolutamente continuo con densidad que satisface  $|V'(t)| \leq b(t)$ .

--

## Prueba del teorema 2(A)

◆ Defina

$$B(t) = \int_0^t b(s) ds$$

◆ Entonces para  $t'' > t'$ :

$$|V(t'') - V(t')| \leq \sup_{x \in X} |f(x, t'') - f(x, t')|$$

$$= \sup_{x \in X} \left| \int_{t'}^{t''} f_t(x, t) dt \right| \leq \int_{t'}^{t''} \sup_{x \in X} |f_t(x, t)| dt$$

$$\leq \int_{t'}^{t''} b(t) dt = |B(t'') - B(t')|$$

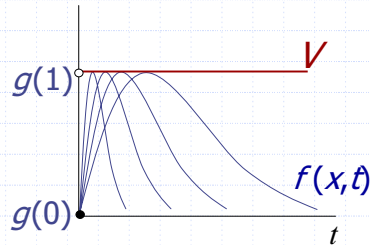
◆ Basta con probar el teorema por intervalos, porque los intervalos abiertos son una base para los conjuntos abiertos. **QED**

--

## ¿Por qué necesitamos $b(\cdot)$ ?

- ◆ Sea  $X=(0,1]$  y  $f(x,t)=g(t/x)$ , donde  $g$  es uniforme y de pico único con el máximo en 1.
  - $V(0)=g(0)$ ,  $V(t)=g(1)$ :  $V$  es discontinuo en 0.
  - Este ejemplo no tiene cota integrable  $b(t)$ :

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |f_t(x, t)| = \sup_{x \in (0, \infty)} \left| \frac{1}{t} \left( \frac{t}{x} g' \left( \frac{t}{x} \right) \right) \right| = \frac{1}{t} \sup_{x \in (0, \infty)} |x g'(x)|$$



61

## Fórmula integral *envelope*

- ◆ Teorema 2(B). Suponga que, además de las hipótesis expresadas en 2(A), el conjunto de optimizadores  $x^*(t)$  es no vacío para todo  $t$ . Entonces, para cualquier selección  $x(t) \in x^*(t)$ ,

$$V(s) = V(0) + \int_0^s f_t(x(t), t) dt.$$

62

## Equi-diferenciabilidad

- ◆ Definición. Una familia de funciones  $\{f(x, \cdot)\}_{x \in X}$  es "equi-diferenciable" en  $t \in (0, 1)$  si

$$\lim_{t' \rightarrow t} \sup_x \left| \frac{f(x, t') - f(x, t)}{t' - t} - f_t(x, t) \right| = 0$$

- ◆ Si  $X$  es finito, es lo mismo que la simple diferenciabilidad.

--

## Diferenciabilidad direccional

- ◆ Teorema 3. Si
  - (i)  $\{f(x, \cdot)\}_{x \in X}$  es equi-diferenciable en  $t_0$ ,
  - (ii)  $x^*(t)$  es no vacío para todo  $t$ , y
  - (iii)  $\sup_x |f_t(x, t_0)| < \infty$ ,

para cualquier selección  $x(t) \in x^*(t)$ ,  $V$  es diferenciable a izda. y dcha. en  $t_0 \in (0, 1)$  y las derivadas satisfacen

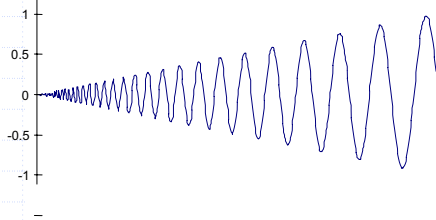
$$V'(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f_t(x(t), t_0)$$

$$V'(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f_t(x(t), t_0)$$

--

## Papel de la "Equi-diferenciabilidad"

- ◆ La diferenciabilidad simple (en lugar de la equi-diferenciabilidad) no es suficiente para que  $V$  tenga derivadas de izquierda y derecha:
  - Sea  $g(t) = t \sin \log(t)$ ,  $f(x, t) = g(t)$  if  $t > \exp(-\pi/2 - 2\pi x)$ ,  
 $f(x, t) = -t$  de otro
  - Así,  $V(t) = g(t)$



65

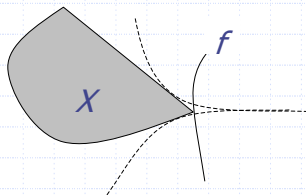
## Problemas continuos

- ◆ **Teorema 4.** Suponga que  $X$ , es un espacio compacto no vacío  $f$  es semicontinuo superior en  $X$  y  $f_t$  es continuo en  $(x, t)$ . Entonces,
  - $V$  es diferenciable direccionalmente
    - $V'(t+) = \max_{x \in X^*(t)} f_t(x, t)$  for  $t \in [0, 1]$
    - $V'(t-) = \min_{x \in X^*(t)} f_t(x, t)$  for  $t \in (0, 1]$
  - En particular,  $V'(t+) \geq V'(t-)$ .
  - $V$  es diferenciable en  $t$  si se mantiene alguno de los enunciados:
    - ◆  $V$  es cóncavo (porque  $V'(t+) \leq V'(t-)$ )
    - ◆  $t$  es un máximo de  $V(\cdot)$  (porque  $V'(t+) \leq V'(t-)$ )
    - ◆  $X^*(t)$  es un singleton (porque  $V'(t+) = V'(t-)$ )

66

## Contraste a un enfoque tradicional

- ◆ En algunos enfoques, la diferenciabilidad de  $x^*$  se usa en el argumento. Sin embargo,  $V$  puede ser diferenciable incluso cuando  $x^*$  no lo es, lo que ocurre a menudo, por ejemplo, en problemas estrictamente convexos:



## Aplicaciones

## Lema de Hotelling

◆ Defina:

$$\pi(p) = \max_{x \in X} p \cdot x$$

$$x^*(p) = \operatorname{argmax}_{x \in X} p \cdot x$$

◆ Teorema. Suponga que  $X$  es compacto. Entonces,  $\pi'(p)$  existe si y sólo si  $x^*(p)$  es un singleton, y en tal caso  $\pi'(p) = x^*(p)$ .

69

## Lema de Shephard

◆ Defina:

$$C(y, p) = \min_{x \in X, x_1 = y} -p_{-1} \cdot x_{-1}$$

$$x^*(p) = \operatorname{arg} \min_{x \in X, x_1 = y} -p_{-1} \cdot x_{-1}$$

◆ Comentario: la variable  $x_1$  representa "salida" y las otras variables representan entradas, medidas como números negativos.

◆ Teorema. Suponga que  $X$  es compacto. Entonces,  $\partial C / \partial p$  existe si y sólo si  $x^*(p)$  es un singleton, y en tal caso  $\partial C / \partial p = x^*(p)$ .

70

## Maximización de varias etapas

◆ Etapa 1: escoja una inversión  $t \geq 0$ .

◆ Etapa 2: escoja un vector de acción  $x \in X \neq \emptyset$

◆ Asuma:

- $f(x, t)$  es equidiferenciable en  $t$  y  $t^* > 0$
- $f(x, t)$  es u.s.c. en  $x$  y  $X$  es compacto

◆ Conclusión: la función de valor  $V(t)$  es diferenciable en  $t^*$  y  $V'(t^*) = 0$ .

- Demostración: aplicar teorema 4.

--

## Diseño de mecanismo

◆  $Y$  = conjunto de resultados

◆ El tipo de agente es  $t$ , la utilidad es  $f(x, t)$ .

◆  $M$  = espacio de mensaje.  $h: M \rightarrow Y$  es la función de resultado.

◆  $X = h(M)$  es el conj. de "resultados accesibles"

◆ Asuma que cada tipo tiene una elección óptima

$$x(t) \in \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x, t)$$

--

## Análisis

- ◆ **Corolario 1.** Suponga que la función de utilidad del agente  $f(x, t)$  es diferenciable y absolutamente continua en  $t$  para todo  $x \in Y$ , y que  $\sup_{x \in Y} f(x, t)$  es integrable en  $[0, 1]$ . Entonces la utilidad de equilibrio del agente  $V$  en cualquier mecanismo que implemente una regla de elección dada  $x$  ha de satisfacer la siguiente condición integral.

$$V(t) = V(0) + \int_0^t f_t(x(s), s) ds.$$

- Esto sólo se había demostrado anteriormente con (a veces "débiles") condiciones adicionales.

73

## Aplicaciones del diseño de mecanismos

- ◆ Modelos en los que los pagos son  $v \cdot p - \pi$ , así que

$$U(v) = U(0) + \int_0^1 v \cdot p^*(sv) ds.$$

### ◆ Teoremas

- Teorema Green-Laffont
  - ◆ Unicidad de mecanismos de estrategia dominante
- Teorema Holmstrom-Williams
  - ◆ Equivalencia de ingresos Bayesiana
- Teorema Myerson-Satterthwaite
  - ◆ Necesidad de ineficacia de negociación
- Teorema Jehiel-Moldovanu
  - ◆ Imposibilidad de eficacia con interdependencia de valores

74

## Teorema Green-Laffont

- ◆ "Unicidad de implementación de estrategia dominante"
- ◆ **Teorema (Variación de Holmstrom).** Suponga que
  - $M$  es un mecanismo directo para implementar el resultado eficiente en estrategias dominantes.
  - el espacio de tipo está uniformemente conectado por ruta.
- ◆ Entonces,
  - la función de pago para el jugador  $j$  en el mecanismo  $M$  es igual a la función de pago del mecanismo de pivote Vickrey-Clarke-Groves más cierta función  $g_j(v_{-j})$  (que depende sólo de los tipos de los otros jugadores).

--

## Teorema Green-Laffont

- ◆ Dado cualquier vector de valor  $v$ , sea  $\{v_j(t) | t \in [0, 1]\}$  una ruta uniforme que conecta cierto valor fijo  $v_j$  a  $v_j = v_j(1)$ . Según el teorema *envelope* aplicado al parámetro de ruta  $t$ ,

$$\begin{aligned} U_j(v_j(t), v_{-j}) &= p_j(v_j(t), v_{-j}) \cdot v_j - X_j(v_j(t), v_{-j}) \\ &= U_j(v_j, v_{-j}) + \int_0^t p_j(v_j(s), v_{-j}) \cdot v_j'(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore X_j(v_j(1), v_{-j}) &= f_j(v_{-j}) + p_j(v_j(1), v_{-j}) \cdot v_j - \int_0^1 p_j(v_j(s), v_{-j}) \cdot v_j'(s) ds \\ \text{donde } f(v_{-j}) &= -U_j(v_j, v_{-j}) \end{aligned}$$

- ◆ Así,  $X_j$  está completamente determinado por las funciones  $p$  y  $f_j$ .

--

## Teorema Holmstrom-Williams

- ◆ **Teorema:** cualquier mecanismo Bayes-Nash que implemente resultados eficientes en un espacio tipo uniformemente conectado por ruta entraña los mismos pagos esperados que el mecanismo de Vickrey, más cierta constante específica del licitador.

- ◆ **Demo.** Sea  $\{v_j(s), s \in [0,1]\}$  una ruta de cierto vector de valor fijo a cualquier otro vector de valor. Según el teorema *envelope*,

$$U_j(v_j(t)) = p_j(v_j(t)) \cdot v_j(t) - X_j(v_j(t))$$

$$= U_j(v_j(0)) + \int_0^t p_j(v_j(s)) \cdot v_j'(s) ds$$

- ◆ Por tanto,  $X_j(v)$  está excepcionalmente determinado por  $U_j(0)$ . Es igual a  $U_j(0)$  más el pago esperado en el mecanismo de Vickrey.

77

## Negociación de dos personas

- ◆ Asuma que

- hay un comprador con valor  $v$  distribuido en  $[0,1]$
- hay un vendedor con coste  $c$  distribuido en  $[0,1]$

- ◆ El mecanismo Vickrey-Clarke-Groves

- hace que cada parte comunique su valor
- supone  $p^*(v,c)=1$  si  $v>c$  y  $p^*(v,c)=0$  de otro modo
- los pagos son
  - ◆ Si  $p^*(v,c)=0$ , no hay pagos
  - ◆ Si  $p^*(v,c)=1$ , el comprador paga  $c$  y el vendedor recibe  $v$

78

## Teorema Myerson-Satterthwaite

- ◆ Los beneficios previstos son:

- $U_B(v) = E[(v-c)1_{\{v>c\}} | v]$ , so  $E[U_B(v)] = E[(v-c)1_{\{v>c\}}]$
- $U_S(c) = E[(v-c)1_{\{v>c\}} | s]$ , so  $E[U_S(c)] = E[(v-c)1_{\{v>c\}}]$
- cada licitador espera recibir el **superávit social absoluto**.

- ◆ Aplicar el teorema Holmstrom-Williams:

- ◆ **Teorema (Myerson-Satterthwaite).** No hay mecanismo ni equilibrio bayesiano o de Nash tal que el mecanismo implemente para todo  $v,c$  con  $v>c$  y

- $U_B(0) = U_S(1) = 0$  ("participación voluntaria por tipo peor")
- $E[U_B(v)] + E[U_S(c)] \leq E[(v-c)1_{\{v>c\}}]$  ("presupuesto esperado equilibrado")

--

## Matices

- ◆ Tenga en cuenta un modelo en el que:

$$\Pr\{v > 1\} = \Pr\{c < 1\} = 1$$

- ◆ Q: ¿Cómo es que transar al precio  $p=1$  no viola el teorema en este modelo?

- ◆ A: Porque recomienda la transacción incluso si  $c>v$

--