# Aprendizaje 2:

# Dinámica del replicador y estabilidad evolutiva

## Mapa de ruta

1. Estrategias evolutivamente estables

2. Dinámica del replicador

# 1 Anotación

- $G$ = ($S$, $A$) es un juego simétrico de 2 jugadores donde:

- $S$ es el espacio estratégico;

- $A_{i,j} = u_1(s_i, s_j) = u_2(s_j, s_i)$;

- $x, y \in \Delta$ son estrategias mixtas; $u(x,y) = x^T A y$;

- $u(ax + (1-a)y, z) = au(x,z) + (1-a)u(y,z)$.

# 2 Estabilidad evolutiva

- A cada jugador se le asigna una estrategia (población/estrategia mutante).
- No explica cómo una población llega a una estrategia de este tipo.
- Pregunta si una estrategia es sólida a presiones evolutivas.
- Ignora los efectos sobre acciones futuras.

# 3 ESS (estrategia evolutivamente estable)

**Definición: se dice que una estrategia (mixta) $x$ es evolutivamente estable sólo si, en cualquier $y \neq x$ $\epsilon_y > 0$ s.a.**

$$u(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1-\varepsilon)x +$$

**por cada $\varepsilon$ en (0, $\epsilon_y$)**

**Hecho: $x$ es evolutivamente estable sólo si $\forall y \neq x,$**

1. $u(x,x) \geq u(y,x),$ **y**
2. $u(x,x) = u(y,x) \Longrightarrow u(x,y) > u(y,y).$

**Prueba: defina la función *score***

$$\begin{aligned} F_x(\varepsilon, y) &= u(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) - u(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) \\ &= u(x-y, x) + \varepsilon u(x-y, y-x). \end{aligned}$$

**ESS** $\iff F_x(\varepsilon, y) > 0$ **para** $\varepsilon \in (0, \epsilon_y].$

## 4 ESS frente a NE

- Si $x \in \Delta^{ESS}$ entonces $(x, x)$ es NE $(x \in \Delta^{NE})$.
  De hecho: $(x, x)$ es un correcto NE.

- $(x, x)$ es NE estricto $\Rightarrow x$ es ESS por defecto.

- Un NE interior puede no ser ESS.

## 5 El juego de la paloma y el halcón



| | |
|---|---|
| $\left(\frac{V-c}{2}, \frac{V-c}{2}\right)$ | $(V,0)$ |
| $(0,V)$ | $(V/2,V/2)$ |

Ejemplo: para $V = 4,\ c = 6;\ x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$—NE; $\forall y \in \Delta,\ y \in BR(x)$.

$$u(x-y, y) = (x_1 - y_1)(2 - 3y_1) = \frac{1}{3}(2 - 3y_1)^2,$$

así, $x$ es ESS.

# 6 El juego de piedra, papel, tijera

| | Piedra | Tijera | Papel |
|---|---|---|---|
| Piedra | 0,0 | 1,-1 | -1,1 |
| Tijera | -1,1 | 0,0 | 1,-1 |
| Papel | 1,-1 | -1,1 | 0,0 |

- **Equilibrio Nash único** $(s^*, s^*)$, **donde** $s^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

- $s^*$ **no es** ESS. $(u(s^* - R, R) = 0)$.

# 7 ESS en juegos de dramatización de papeles

- **Dado** $(S^1, S^2, u_1, u_2)$, **considere un juego simétrico (** $S, u$ **), donde**
  - $S = S^1 \times S^2$;
  - **para** $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in S$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[u_1(x_1, y_2) + u_2(x_2, y_1)].$$

**Teorema:** $x$ **es ESS de (** $S, u$ **) sólo si** $x$ **es un NE estricto de** $(S^1, S^2, u_1, u_2)$.

## 8 Dinámica del replicador

- **Mecanismo de selección.**
- $p_i(t) = \#$ **personas que juegan** $s_i$ **en** $t$
- $p_{(t)} =$ **población total en** $t$.
- $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}$; $x(t) = (x_1(t), \ldots x_k(t))$ .
- $u(x, x) = \sum_i x_i u(s_i, x)$.
- **Los replicadores son estrategia pura**

$$\dot{p}_i = [\beta + u(s_i, x) - \delta]\, p_i.$$

- $$\dot{x}_i = [u(s_i, x) - u(x, x)]\, x_i = u(s_i - x, x) x_i.$$

## 9 Observaciones

- $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{x_i}{x_j}\right] &= \frac{\dot{x}_i}{x_j} - \frac{x_i \dot{x}_j}{x_j x_j} \\ &= \left[u(s_i, x) - u(s_j, x)\right] \frac{x_i}{x_j}. \end{aligned}$$

- **Si** $u$ **se convierte en** $u' = au + b$, **la dinámica del replicador se convierte en**

$$\dot{x}_i = au(s_i - x, x) x_i.$$

## 9.1 Juegos de 2 × 2

**Considere ($S$, $A$), donde** $A = \begin{bmatrix} a_1, a_1 & 0, 0 \\ 0, 0 & a_2, a_2 \end{bmatrix}.$

**Tenemos**

$$\begin{aligned} u(s_i, x) &= a_i x_i; \\ u(x, x) &= (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^T = a_1 x_1^2 + a_1 x_2^2; \\ u(s_1 - x, x) &= (a_1 x_1 - a_2 x_2) x_2. \end{aligned}$$

**y así**

$$\dot{x}_1 = (a_1 x_1 - a_2 x_2) x_1 x_2.$$

## 9.2 Clasificación

1. $a_1 a_2 < 0.$ **Entonces**
   - $x_1 \to_t 0$ **cuando** $a_1 < 0;$
   - $x_1 \to_t 1$ **cuando** $a_1 > 0.$
2. $a_1 a_2 > 0;$ **define** $\lambda = \frac{a_2}{a_1 + a_2},\ (\lambda, 1 - \lambda)$ **Entonces,**
   - $x_1 = \lambda$ **es estable si** $a_1 < 0;$
   - $x_1 = \lambda$ **es inestable si** $a_1 > 0.$

**Compare con ESS.**

**Ejemplos: dilema del prisionero, juego del gallina, juegos de coordinación, batalla de los sexos, ...**

# 10 Racionalizabilidad

- $\xi(t, x_0)$ es la solución a la dinámica del replicador que empieza en $x_0$.

**Teorema: si una estrategia pura $i$ es estrictamente dominada (por y), entonces $\lim_t \xi_i(t, x_0) = 0$ para cualquier $x_0$ interior**

**Prueba: defina** $v_i(x) = \log(x_i) - \sum_j y_j \log(x_j)$. **Entonces**

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(x(t))}{dt} &= \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \sum_j y_j \frac{\dot{x}_j}{x_j} \\ &= u(s_i - x, x) - \sum_j y_j u(s_j - x, x) \\ &= u(s_i - y, x) \leq -\epsilon < 0. \end{aligned}$$

**de ahí,** $v_i(\xi(t, x_0)) \to -\infty$, so $\xi_i(t, x_0) \to 0$.

**Teorema: si $i$ no es racionalizable, entonces** $\lim_t \xi_i(t, x_0) =$ **para cualquier $x_0$ interior.**

# 11 Teoremas

**Teorema: todo ESS $x$ es un estado estacionario asintóticamente estable de la dinámica del replicador.**

**(Si los individuos pueden heredar las estrategias mixtas, la conversa es también cierta.)**

**Teorema: si $x$ es un estado estacionario asintóticamente estable de la dinámica del replicador, y se puede alcanzar desde un $x_0$ interior, entonces $(x, x)$ es un equilibrio de Nash perfecto.**