Boletín de ejercicios 3

Thomas Philippon

19 de abril, 2002

1 Riqueza humana, riqueza económica y consumo

El objetivo que se persigue consiste en obtener las fórmulas de la página 13 del tema 2. Se trata de un análisis de equilibrio parcial centrado en la cuestión del consumidor en una economía descentralizada. Partimos de que la función de utilidad del consumidor es *CRRA:*

$$u(C) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left(C^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - 1\right)$$

Suponemos que **no hay incertidumbre**. La restricción presupuestaria dinámica es:

$$S_{t+1} = R_t S_t + W_t - C_t$$

1.1 Integración de la restricción presupuestaria

Demuestre que, para todo n > 1

$$\frac{S_{t+n}}{R_{t+1} \times .. \times R_{t+n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{W_{t+i} - C_{t+i}}{R_{t+1}..R_{t+i}} + R_t S_t + W_t - C_t$$

1.2 Necesidad de una condición de no juego de Ponzi

Supongamos, para simplificar, que W_t tiene por límite superior un W finito:

$$\sup_t W_t = W < \infty$$

Escoja **cualquier** valor $C > 0$. Demuestre que, cuando no existe límite a lo que el consumidor puede pedir prestado, el perfil de consumo $C_t = C$ es sostenible para todo t. Demuestre asimismo que, cuando el valor de C es lo suficientemente alto, el ahorro es negativo y su valor absoluto termina por crecer a un ritmo R_t. en el sentido de que:

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} \simeq R_t$$

para valores altos de t. Es lo que se conoce como un juego de Ponzi. Por último, demuestre que la condición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{t+n}}{R_{t+1} \times .. \times R_{t+n-1}} \geq 0$$

elimina estos juegos (es suficiente con demostrarlo para $C_t = C$ constante). Interprete esta condición.

1.3 La restricción presupuestaria intertemporal

¿Por qué es evidente que podemos sustituir la desigualdad de no juego de Ponzi por una igualdad? Utilice esta igualdad para obtener la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{t+i}}{R_{t+1}..R_{t+i}} + C_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_{t+i}}{R_{t+1}..R_{t+i}} + W_t + R_t S_t$$

Interprete los distintos términos.

1.4 La regla de consumo

Demuestre, mediante la condición de primer orden, que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{t+i}}{R_{t+1}..R_{t+i}} + C_t &= C_t \left(1 + D_t\right) \\ D_t &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i\sigma} \times \left(R_{t+1}..R_{t+i}\right)^{\sigma-1} \end{aligned}$$

Demuestre que se recupera la fórmula del supuesto de utilidad log de la página 13 e interprete la ecuación. ¿Qué ocurre con el consumo actual cuando ocurre un cambio inesperado en la secuencia de los tipos de interés futuros? Describa los distintos efectos que se producen: el efecto renta-sustitución y el efecto riqueza. El efecto riqueza proviene de:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_{t+i}}{R_{t+1}..R_{t+i}} + W_t + R_t S_t$$

mientras que el efecto renta-sustitución provine de D_t

2 Modelo de consumo de valoración de activos

La valoración de activos financieros consiste en calcular el valor de una corriente de flujos de caja sujetos a riesgo. Una de las formas de realizar este cálculo es mediante el CAPM (modelo de valoración de activos de capital).

Tenemos el caso de un inversor que desea maximizar su utilidad prevista invirtiendo en un bono sin riesgo y en un stock con riesgo. Hay dos periodos: $t = 0, 1$. La incertidumbre en el periodo 1 viene descrita por el estado: $\omega \in \Omega$. Llamaremos: R al rendimiento del bono, $\tilde{R}(\omega)$ al de la cartera, s al ahorro y x a la parte del ahorro invertida en la cartera. El inversor dispone de y_0 unidades del numerario en el momento 0. De esta forma, el programa del inversor es:

$$\max u\left(c_0\right) + \beta E\left[u\left(c_1\left(\omega\right)\right)\right]$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} c_0 + s &= y_0 \\ s\left(\left(1-x\right)R + x\widetilde{R}\left(\omega\right)\right) &= c_1\left(\omega\right) \end{aligned}$$

Demuestre que

$$\frac{1}{R} = \frac{E\left[\beta u'\left(c_1\left(\omega\right)\right)\right]}{u'\left(c_0\right)}$$

Interprete la ecuación.

Demuestre que el precio en el momento 0 (p_0) de una cartera que produce unos dividendos y(ω) en el momento 1 es:

$$p_0 = \frac{1}{u'\left(c_0\right)} E\left[\beta u'\left(c_1\left(\omega\right)\right) \times y\left(\omega\right)\right]$$

(Tenga en cuenta que, por definición:

$$\widetilde{R}\left(\omega\right) = \frac{y(\omega)}{p_0})$$

Supongamos que la utilidad es cuadrática:

$$u\left(c\right) = c - \gamma \frac{c^2}{2}$$

Consideremos ahora dos carteras, *A* y *B*, con unos mismos dividendos previstos: $E\,[y_A\,(\omega)] = E\,[y_B\,(\omega)]$. Supongamos además que $y_A\,(\omega)$ tiene una correlación positiva con *c* (ω) mientras que la correlación entre $y_B\,(\omega)$ y $c\,(\omega)$ es negativa.

Demuestre que $p_{0,B} > p_{0,A}$. Puede serle de utilidad la fórmula $E\,[AB] = cov\,(A, B) + E\,[A]\,E\,[B]$. ¿Cuál sería la intuición para este resultado? ¿Cómo lo generalizaría para un supuesto con una función de utilidad más general?

3 Teoría Q de la inversión

Partimos de un modelo estocástico de horizonte infinito de una empresa que tiene que hacer frente a costes de ajuste de la inversión. El flujo de caja aleatorio que genera la empresa es:

$$\Pi_t = \Pi(K_t, I_t, Z_t)$$

Donde *K* es el stock de capital de la empresa, *I* es su inversión y *Z* representa los shocks. El capital se acumula conforme a:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

Para simplificar, supondremos que los flujos de caja se descuentan mediante un tipo constante libre de riesgos:

$$V_t = \Pi_t + E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty} R^{-i} \times \Pi_{t+i}\right]$$

La empresa maximiza V_t.
Demuestre, suponiendo que el programa de la empresa es cóncavo, que la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \Pi_t(K_t, I_t)}{\partial I_t} + E_t \left[\sum_{i=1}^{\infty} R^{-i} (1-\delta)^{i-1} \frac{\partial \Pi_{t+i}(K_{t+i}, I_{t+i})}{\partial K_{t+i}} \right] = 0$$

Esta es la teoría q de la inversión. El primer término de la fórmula indica el coste marginal de una unidad extra de inversión en el momento actual. El segundo término, al que llamaremos q_t, representa los ingresos marginales (es decir, el valor actual descontado del producto marginal del capital en el futuro):

$$q_t = E_t \left[\sum_{i=1}^{\infty} R^{-i} (1-\delta)^{i-1} \frac{\partial \Pi_{t+i}(K_{t+i}, I_{t+i})}{\partial K_{t+i}} \right]$$

3.1 Ejemplo sencillo de costes de ajuste

Veamos el supuesto en el que

$$\Pi(K_t, I_t, Z_t) = Z_t K_t - I_t \left(p_{I,t} + A\left(\frac{I_t}{K_t} \right) \right)$$

A (.) es la función de coste de ajuste, y $p_{I,t}$ es el precio de los bienes de inversión. Interprete cada uno de los términos de esta fórmula. ¿En qué momento es más probable que describa fielmente la realidad? Supongamos que A (.) es una función convexa y creciente. Obtenga las condiciones de primer orden e interprételas. Demuestre que éstas implican una aplicación simple de q_t a la decisión de inversión.¿Qué factores afectan a q_t? ¿Cómo reaccionaría la inversión a un cambio en q_t con costes de ajuste y sin ellos?

3.2 Q media y Q marginal

Nos encontramos con un problema: q no se puede observar (explique por qué). Sin embargo, sí que es posible observar la q de Tobin, o q media, que se define como el valor de mercado de la empresa (deuda + capital social) dividido por el valor contable de su stock de capital. En realidad, debido a la convención de cálculo de tiempo del modelo, es necesario definirla como el valor neto de mercado de las FOC (condición de primer orden) en el momento actual.

$$Q_t = \frac{V_t - \Pi_t}{K_{t+1}}$$

La pregunta tiene por objeto demostrar que, para rendimientos a escala constantes, la q media coincide con la q marginal. Emplearemos para ello el método de los multiplicadores de Lagrange.

Defina el Lagrangiano:

$$E_t\left[\sum_{i=o}^{\infty} R^{-i}\times\left(\Pi_{t+i}+q_{t+i}\left((1-\delta)K_{t+i}+I_{t+i}-K_{t+i+1}\right)\right)\right]$$

Demuestre que las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi_t(K_t,I_t)}{\partial I_t}+q_t &= 0\\ q_t &= E_t\left[\frac{1}{R}\times\left(\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial K_{t+1}}+(1-\delta)q_{t+1}\right)\right]\end{aligned}$$

Supongamos que los rendimientos a escala de $\Pi_t(K_t, I_t)$ son constantes. Demuestre que ello implica que:

$$\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial K_{t+1}}\times K_{t+1}=\Pi_{t+1}-\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}}\times I_{t+1}$$

Empleando esta fórmula junto con los flujos de capital y la acumulación de capital para demostrar que:

$$q_tK_{t+1}=E_t\left[\frac{1}{R}\Pi_{t+1}+\frac{1}{R}q_{t+1}K_{t+2}\right]$$

Prosiga con la solución hasta demostrar que:

$$q_t=Q_t$$

3.3 Prueba de la teoría

¿Cómo podemos probar esta teoría? ¿Qué tipo de datos serían necesarios? Supongamos que efectuamos la siguiente regresión:

$$\frac{I_t}{K_t}=a+bQ_t+\varepsilon_t$$

¿Qué relación guarda b con los costes de ajuste? Empíricamente, Q no resulta muy útil para explicar la inversión, tanto a escala de la empresa como a escala global. De hecho, los beneficios actuales (o futuros) son mucho más útiles que Q en este sentido.¿Cómo interpretaría estas conclusiones? (tenga presente el poder del monopolio y los rendimientos a escala crecientes, las restricciones crediticias y las burbujas del mercado de valores).

3.4 Crédito extra

Obtenga el mismo resultado ($q = Q$) utilizando la programación dinámica. (Si lo resuelve correctamente, no debería ocupar más de dos líneas).