Fluctuaciones, shocks, incertidumbre y la elección consumo/ahorro

Olivier Blanchard[*¤]

Abril de 2002

[*] 14.452. Primavera de 2002. Tema 2

Partimos de un modelo con dos elementos:

- Shocks, lo que supone incertidumbre. (Una parte importante de lo que ocurre no se puede prever). Shocks naturales si queremos describir periodos de bonanza y de escasez. Shocks de productividad.
- Elección intertemporal básica. Consumo/ahorro.

De modo que partimos del modelo, ya conocido, de **Ramsey**, añadimos shocks tecnológicos e incertidumbre por implicación.

Evidentemente, hay muchas cosas que el modelo no puede explicar: movimientos en el empleo y muchos otros problemas.

Pero el punto de partida es bueno: shocks/mecanismos de propagación. Naturaleza de la atenuación del consumo. Comovimientos del consumo y la inversión.

Y una estructura simple que permite analizar una serie de cuestiones básicas metodológicas y conceptuales. ¿Cómo resolverlas? Equivalencia entre economía centralizada y descentralizada.

1 Problema de optimización

$$\max E[\sum_0^\infty \beta^i U(C_{t+i})|\Omega_t]$$

sujeto a:

$$C_{t+i} + S_{t+i} = Z_{t+i}F(K_{t+i}, 1)$$

$$K_{t+i+1} = (1-\delta)K_{t+i} + S_{t+i}$$

¿Cómo podemos analizar este sistema? Más adelante daremos una interpretación económica descentralizada. Pero es más sencillo resolverlo de este modo.

Separabilidad. Descuento exponencial. ¿Por qué? ¿Qué ocurre con el no exponencial o el hiperbólico, por ejemplo?

Expectativa basada en la información del momento *t*.

No hay crecimiento. Si quisiéramos que lo hubiera, buscaríamos un itinerario equilibrado, como el progreso neutral de Harrod *ZtF(Kt; A_tN).*
Podemos considerar todas las variables divididas por A_t. (Ver la entrega de Thomas).

2 Cómo obtener las condiciones de primer orden

La forma más fácil de obtenerlas es "a la vieja usanza". Multiplicadores de Lagrange. Juntamos las dos restricciones. Asociamos $\beta^t\Lambda_t$ con la restricción en el momento *t*. (¿Por qué? Porque es lo mejor. Para así obtener el valor marginal del capital con respecto al momento *t + j*, no con respecto al momento *t*):

$$E[U(C_t) + \beta U(C_{t+1}) - \lambda_t(K_{t+1} - (1-\delta)K_t - Z_tF(K_t,1) + C_t) - \beta\lambda_{t+1}(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1} - Z_{t+1}F(K_{t+1},1) + C_{t+1}) + ... \mid \Omega_t]$$

Por tanto, las condiciones de primer orden nos vienen dadas por:

$$C_t \ : \ E[\ U'(C_t) = \lambda_t \mid \Omega_t]$$

$$K_{t+1} \ : \ E[\ \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1 - \delta + Z_{t+1}F_K(K_{t+1},1) \mid \Omega_t]$$

Definir $R_{t+1} \equiv 1 - \delta + Z_{t+1} F_K (K_{t+1},1)$. Y utilizar el hecho de que $C_t;\lambda_t$ son conocidas en el momento t, para obtener:

$$U'(C_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = E[\beta R_{t+1}\lambda_{t+1} \mid \Omega_t]$$

Interpretación

- La utilidad marginal del consumo debe ser igual al valor marginal del capital (riqueza).

- El valor marginal del capital debe ser igual al valor marginal previsto del capital en el futuro, multiplicado por el beneficio bruto previsto del capital y por el factor de descuento subjetivo.

O, juntando ambas interpretaciones:

$$U'(C_t) = E\ [\ \beta R_{t+1}U'(C_{t+1}) \mid \Omega_t]$$

Esta es la **condición Keynes-Ramsey.** Atenuación y basculación.

Para verlo con más claridad, se utiliza la función de elasticidad constante (que, en un contexto de incertidumbre, se corresponde también con la función CRRA):

$$U(C) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}C^{(\sigma-1)/\sigma)}$$

Luego:

$$C_t^{-1/\sigma} = E[\ \beta R_{t+1}C_{t+1}^{-1/\sigma} \mid \Omega_t]$$

O, como ya conocemos el valor de C_t en tiempo t

$$E[(\frac{C_{t+1}}{C_t})^{-1/\sigma}\beta R_{t+1}|\Omega_t] = 1$$

Esta fórmula nos da mucho juego, que es de lo que se trata en economía. Pero, para poder trabajar bien con la intuición, dejaremos totalmente de lado la incertidumbre:

$$\underline{\frac{C_{t+1}}{C_t} = (\beta R_{t+1})^{\sigma}}$$

t

Cuando $\sigma \to 0$, C_{t+1}/C_t

Cuando $\sigma \to \infty$, $C_{t+1}/C_t \to +/-\infty$.

Interpretación.

3 Efectos de los shocks. Uso de las condiciones de primer orden (FOC) y de la intuición.

Fijémonos en el estado estacionario no estocástico, $Z \equiv 1$:

$$C_t = C_{t+1} \Rightarrow R = (1 - \delta + ZF_K(K^*, 1)) = 1/\beta \Rightarrow K^*$$

Esta es la regla de oro moodificada:

$$ZF(K^*, 1) - \delta K^* = C$$

Supongamos un cambio aditivo permanente en F (.,.). No es muy realista, pero sí resulta útil. No hay cambio en el estado estacionario. No hay cambio en F_K para un valor dado de D, así que no hay basculación ***(tilting)***. El consumo se incrementa paralelamente al shock.

Supongamos un shock multiplicativo permanente. Z aumenta de forma permanente. Luego, en el nuevo estado estacionario, K es más alto. Inversión positiva. Luego C debe incrementarse en menor medida que $ZF(K, 1)$. ¿Puede disminuir C? Sí, siempre que el valor de σ sea lo bastante alto. ¿Por qué? La atenuación ***(smoothing)*** sube. La basculación ***(tilting)*** baja.

¿Por qué, cuando es transitorio? C se incrementa en menor medida Luego hay más inversión, pero durante menos tiempo.

En resumen: shocks tecnológicos positivos. Inversión: aumenta. Consumo: probablemente, pero no es seguro. Por ahora, no encaja con los datos esenciales.

¿Qué ocurre con otros shocks? Imaginemos un cambio en el factor de descuento. β disminuye: como el valor futuro, menos. (Cuestiones más profundas de incertidumbre en la tasa de descuento). ¿Qué puede servir?

La trayectoria del consumo basculará hacia el consumo presente. Luego el consumo presente crecerá. Pero, al no haber variado la producción, la inversión disminuye. Decididamente sólido. No es nada bueno para probar shocks en esta clase de modelos.

4 Efectos de los shocks. Resolución del modelo.

Resolver el modelo es difícil. Distintos enfoques.

Dejar de lado la incertidumbre, ir a tiempo continuo y utilizar un

diagrama de fase.

- Modelo logarítmico lineal, obteniendo una solución explícita (numéricamente o analíticamente).
- Configuración como un problema de programación dinámica estocástica y resolverlo numéricamente.
- Hallar casos especiales que se resuelvan explícitamente.

4.1 Tiempo continuo, dejando de lado la incertidumbre

Configuramos el modelo en tiempo continuo. BF, Capítulo 2. Es difícil tratar la incertidumbre, así que tendremos que suponer que los individuos actúan como si ésta no existiera.

A continuación podemos emplear un diagrama de fase para caracterizar los efectos dinámicos de los shocks. Suele ser muy útil.

Suponemos que:

$$\max \int_0^\infty e^{-\theta t} U(C_t)$$

sujeto a:

$$\dot{K}_t = ZF(K_t, 1) - \delta K_t - C_t$$

Luego las FOC de Keynes-Ramsey:

$$\dot{C}_t\ /Ct = \sigma(ZF_K(K_t, 1) - \delta - \theta)$$

Podemos representar este sistema diferencial en un diagrama de fase. Si lo hacemos, mostraremos que la solución es una camino de silla.

Dado el valor de K, tenemos también el valor de C.

En este sistema, mostramos el efecto de un incremento permanente (inesperado) en Z. Demostrar si el aumento o la disminución de C es ambiguo y si depende de σ.

4.2 Modelo linearización logaritmica

Si observamos el sistema compuesto por las FOC y la ecuación de acumulación, podemos considerarlo como un sistema en diferencias no lineal:

El consumo C_t depende de K_{t+1} y de C_{t+1}.

El capital K_{t+1} depende de K_t y de C_t

El carácter no lineal hace difícil resolver el modelo. Resulta mucho más fácil si lo hacemos lineal o logarítmico lineal. (Podemos invertir la expectativa y la suma).

(¿Por qué es mejor hacer el modelo logarítmico lineal que lineal? Por la misma razón por la que las elasticidades suelen ser más útiles que las derivadas). (Véase Campbell para un estudio detallado).

De este modo, la linearización logaritmica en un entorno del estado estacionario da como resultado:

$$c_t = E[c_{t+1}|\Omega_t] - \sigma E[r_{t+1}|\Omega_t]$$

$$(R/F_K)E[r_{t+1}|\Omega_t] = (F_{KK}K/F_K)k_{t+1} + E[z_{t+1}|\Omega_t]$$

$$k_{t+1} = Rk_t - (C/K)c_t + (F/K)z_t$$

donde las letras minúsculas indican desviaciones proporcionales del estado estacionario.

(¿Cómo derivar estas relaciones? Diferenciando totalmente cada ecuación y, a continuación, multiplicando y dividiendo las derivadas para obtener las elasticidades). Veamos por ejemplo la ecuación de Euler:

$$E[U'' \, dC_t = U'' \, dC_{t+1} + U'\beta \, dR_{t+1} \mid \Omega_t] = 1$$

Dividimos ambos lados por U', y aplicamos $\beta R = 1$, para obtener:

$$E[(U''C/U')dC_t/C = (U''C/U')dC_{t+1}/C + dR_{t+1}/R \mid \Omega_t] = 1$$

y aplicamos $1/\sigma = -U''C/U$ para obtener la expresión arriba indicada).

A continuación, sustituyendo Er_{t+1} por la segunda expresión, y sustituyendo también k_{t+1} por su valor en la tercera expresión, tenemos un sistema lineal en c_t, c_{t+1}, k_{t+1}, k_t y z_t.

Este sistema diferencial se puede resolver de varias maneras. Coeficientes indeterminados. Si hubiera que hacer un cálculo aproximado:

c_t lineal en k_t; z_t; $E[z_{t+1} \mid \Omega_t]$; $E[z_{t+2} \mid \Omega_t]$…

O resolverlo explícitamente mediante una matriz algebraica: BK, o alguno de los métodos de BF. (Véase la entrega y el programa Matlab escrito por Thomas Philippon (RBC.m)).

Supongamos, además, que deseamos asumir un proceso para z_t. Por ejemplo:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \epsilon_t$$

Luego todas las expectativas de futuro dependerán exclusivamente de z_t, por lo que el consumo nos vendrá dado por:

c_t lineal en k_t; z_t

Regla de consumo: el consumo depende de k_t y z_t. Lo que nos lleva a la programación dinámica estocástica.

4.3 Programación dinámica estocástica.

Podemos recurrir a la programación dinámica estocástica para asumir un proceso específico para z_t.

Supongamos, por ejemplo, que Z_t sigue un proceso de Markov, por lo que lo único que necesitamos saber para predecir valores futuros de Z es Z_t. Luego el valor del programa dependerá únicamente de K_t y Z_t. (¿Por qué?)

Lo pondremos por escrito como $V(K_t; Z_t)$:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{C_t, C_{t+1}, \dots} E[\sum_{0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}) \mid \Omega_t]$$

sujeto a:

$$K_{t+i+1} = (1-\delta)K_{t+i} + Z_{t+i}F(K_{t+i}, 1) - C_{t+i}$$

La ventaja de la programación dinámica estocástica es que nos permite reformular este problema de horizonte infinito como un problema de dos periodos:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{C_t, K_{t+1}} [U(C_t) + \beta E[V(K_{t+1}, Z_{t+1} | \Omega_t]$$

sujeto a:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Z_t F(K_t, 1) - C_t$$

Sería mucho más sencillo si conociéramos la forma de la función de valor. Obtendríamos la regla:

$$C_t = C(K_t, Z_t)$$

Pero, evidentemente, no conocemos la función de valor, pese a lo cual resulta fácil obtenerla numéricamente:

- Partimos de cualquier función $V(.,.)$, a la que llamaremos $V_0(.,.)$.
- La utilizamos como función del lado derecho y resolvemos para $C_0(.,)$.
- Resolvemos para la función $V_1(.,.)$ correspondiente al lado izquierdo.

- Aplicamos $V_1(.,.)$ al lado derecho, obtenemos $C_1(.,.)$, e iteramos.

Bajo condiciones lo suficientemente generales, esto nos llevaría a la función de valor y a la regla de consumo óptimo. Varias cuestiones numéricas. Necesitamos una cuadrícula para *K; Z.* Sencillo desde el punto de vista conceptual. (Leer, al respecto, Ljungqvist y Sargent, capítulos 2 y 3).

Si hacemos esto (véase el ejercicio de Matlab DP.m escrito por Thomas), podemos obtener la superficie de consumo como una función de *K; Z.* Podemos observar cómo *C* se desplaza junto a Z por distintos valores de σ y comprobar nuestra intuición a partir del diagrama de fase.

4.4 Casos especiales

Por último, podemos hallar una serie de casos especiales que tienen solución explícita. Para el modelo que nos ocupa, un caso especial bien conocido y estudiado es (véase BF, capítulo 7, o LS, capítulo 2):

$$U(C_t) = \log C_t$$

$$Z_t F(K_t, 1) = Z_t K_t^{\alpha} \text{ (Cobb Douglas)}$$

$$\delta = 1 \text{ (depreciación total)}$$

Evidentemente, el último supuesto es el menos aceptable. Con estos supuestos (no es preciso que especifiquemos el proceso para Z_t):

$$C_t = (1 - \alpha\beta) Z_t K_t^{\alpha}$$

Un shock positivo afecta en el mismo sentido a la inversión y al consumo. Ambos se incrementan de forma proporcional al shock.

Un atajo aún más corto consiste en abandonar directamente la estructura de horizonte infinito y considerar un problema de optimización de dos periodos. Se trata de un paso que suele resultar útil y que proporciona gran parte de la intuición.

5 La economía descentralizada

Hasta el momento hemos tratado un problema de planificación central. Pero, teniendo en cuenta los supuestos, vemos que existe un equilibrio competitivo que actúa como réplica.

Resulta útil fijarse en la economía descentralizada, en la que hay muchos consumidores/trabajadores idénticos y también muchas empresas idénticas.

Existen muchas formas de describir la economía. Las empresas pueden comprar capital y mantenerlo, o bien tomarlo prestado de los consumidores. También pueden financiarse a través de deuda, emisión de acciones, etcétera. Por ahora supondremos que todo el capital se mantiene en poder de los consumidores, que lo alquilan a las empresas.

Los mercados de bienes, mano de obra y servicios de capital son competitivos. Las empresas alquilan mano de obra y servicios de capital en el mercado de capital y mano de obra.

Consumidores

- Cada consumidor tiene las mismas preferencias arriba indicadas.
- Cada uno de ellos ofrece de forma inelástica una unidad de mano de obra en un mercado de mano de obra competitivo, a un salario W_t.
- Cada uno tiene la posibilidad de ahorrar acumulando capital, el cual se alquila a las empresas por periodos en un mercado competitivo de servicios de alquiler a una tasa de alquiler neta (la tasa de alquiler neta de depreciación) r_t.
- Cada consumidor posee las mismas participaciones en los beneficions de las empresas que operan en la economía. Pero, como éstas funcionan bajo rendimientos constantes, los beneficios son iguales a cero, por lo que podemos prescindir de este dato.
- Por tanto, la restricción presupuestaria de los consumidores nos viene dada por la fórmula:

$$K_{t+1} = (1 + r_t)K_t + W_t - C_t$$

- Luego la condición de primer orden es:

$$U'(C_t) = E[\ (1 + r_{t+1})\beta U'(C_{t+1} \mid \Omega_t]$$

Empresas

- Las empresas tienen la tecnología descrita arriba: $Z_tF(K_t; N_t)$.
- Alquilan mano de obra y capital. Por consiguiente, su beneficio viene dado por:

$$\pi_t = Y_t - W_tN_t - (r_t + \delta)K_t$$

El último término entre paréntesis es la tasa de alquiler bruta.

- Maximizan el valor actual de los beneficios, descontando el tipo de interés. Luego:

$$\max E[\pi_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_{j=1}^{j=i}(1 + r_{t+j})^{-1}\pi_{t+j} \mid \Omega_t]$$

- La maximización del beneficio implica que:

$$W_t = F_N(K_t, N_t)$$

$$r_t + \delta = F_K(K_t, N_t)$$

Por último, el equilibrio del mercado de mano de obra implica que:

$$N_t = 1$$

Resulta sencillo demostrar que el equilibrio coincide con el del problema de planificación central.

Aplicando la relación entre la tasa de alquiler y el producto marginal del capital, y sustituyéndola en las condiciones de primer orden:

$$U'(C_t) = E[(1 - \delta + F_K(K_{t+1}, 1))\beta U'(C_{t+1} \mid \Omega_t]$$

Aplicando las expresiones correspondientes al salario y a la tasa de alquiler a la restricción presupuestaria de los consumidores, tenemos:

$$K_{t+1} = (1 - \delta + F_K(K_t, 1))K_t + F_N(K_t, 1) - C_t$$

O bien:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + F(K_t, 1) - C_t$$

¿Qué hemos aprendido? Obtenemos una interpretación distinta. Pensemos en los consumidores cuando se produce un shock positivo a Z_t. Esperan recibir salarios más altos, pero también tipos de interés más elevados. ¿Cómo reaccionan?

Ya sabemos que no podemos, por lo general, resolver la cuestión del consumo. (Si no podíamos antes, tampoco podemos ahora). Pero también ahora podemos buscar trucos o fijarnos en casos especiales.

Podemos, por ejemplo, dejar de lado la incertidumbre, asumir el modelo logarítmico, y demostrar (siguiendo las líneas expuestas en BF, pág. 50) que:

$$C_t = (1 - \beta)[(1 + r_t)K_t + H_t]$$

donde:

$$H_t \equiv [W_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_{j=1}^{j=i}(1 + r_{t+j})^{-1} W_{t+j}]$$

Luego, los consumidores se fijan en la riqueza humana, el valor actual de los salarios, más la riqueza no humana, el capital; por lo que pueden consumir una fracción constante de la riqueza total. Lo que no consumen lo ahorran.

Fijémonos de nuevo en los efectos de un shock tecnológico. ¿Cuáles son sus efectos en el trabajo?