# Decisiones de inversión significativas.

Olivier Blanchard*

Abril de 2002

* 14.452. Primavera de 2002. Tema 4

El ***modelo benchmark*** (y la extensión RBC), contenía una clara decisión de consumo/ahorro.

Pero no hacía mención a ninguna decisión de inversión. Más concretamente:

- Desde el punto de vista de las empresas, había una demanda de capital (de servicios de capital) en cada periodo:

$$Z_t F(K_t, N_t) = r_t$$

La demanda de capital era la necesaria para igualar el producto marginal del capital con la suma del tipo de interés más la tasa de descuento.

- Desde el punto de vista de la economía (equilibrio general), el stock de capital en *t* venía dado por decisiones pasadas, por lo que la misma ecuación determinaba el tipo de interés de un periodo en *t*.

- En otras palabras, el tipo de interés era siempre igual al producto marginal del capital.

- De hecho, el tipo de interés tiende a menudo a diferir del producto marginal del capital, lo cual se explica si consideramos el hecho de que las empresas deben afrontar sus costes de ajuste de capital.

Se trata de una cuestión que merece mucho la pena explorar. Al introducir costes de ajuste, vemos que:

- Se puede considerar que la economía tiene unas demandas de consumo e inversión bien definidas, lo que depende de los tipos de interés, beneficios y salarios actuales y previstos para el futuro.

- En este modelo económico, la estructura temporal de los tipos de interés equivale al conjunto de precios inter temporales que equilibra el mercado de bienes (inversión más consumo es igual a producción) ahora y en el futuro.

• Podemos también considerar esta extensión como una versión amplia y dinámica de la relación ahorro-inversión, en la que la demanda global depende de los ingresos y los tipos de interés actuales y previstos.

## 1 Problema de optimización

Veamos la siguiente versión del problema de optimización de referencia, en la que se deja de lado la elección trabajo/ocio:

$$\max E \, [ \sum_{0}^{\infty} \beta^{i} U(C_{t+i}$$

sujeto a:

$$C_{t+i} = G(K_{t+i}, N_{t+i}, I_{t+i}, Z_{t+i})$$

$$K_{t+i+1} = (1 - \delta) K_{t+i} + I_{t+}$$

El cambio con respecto al problema de referencia es la presencia de una función de producción neta, que indica la cantidad de producción neta, los inputs $K_t$ y $N_t$, y la inversión $I_t$. Luego: $G_K > 0$; $G_N > 0$; $G_I < -1$.

Hasta ahora, hemos supuesto que:

$$G(K_t; N_t; I_t; Z_t) = Z_t F(K_t; N_t) - I_t$$

La producción neta era igual a la producción menos la cantidad que se apartó como inversión, e invertir $I_t$ no suponía un coste adicional.

No obstante, es normal pensar que las empresas deberán hacer frente a costes de ajuste. Por ejemplo, una vez el capital se halla instalado, retirarlo puede resultar difícil y costoso (irreversibilidad). Y, por otra parte, una alta tasa de inversión puede traer consigo importantes costes de ajuste e instalación (pensemos en lo que supone construir una planta industrial en un mes o en un año).

Una forma sencilla de reproducir esto es:

$$G(K_t, N_t, I_t, Z_t) \equiv Z_t F(K_t, N_t) - I_t($$

con f(.) al alza en *I/K*.

De esta forma queda expresada la irreversibilidad. Por ejemplo: $f = 0$ para $I > 0$, $f = -1$ si $I < 0$.

- Podemos obtener una fórmula más sencilla si consideramos que *f* es linear:

$$G(K_t, N_t, I_t) \equiv Z_t F(K_t, N_t) - I_t(1$$

que es la que se utiliza más abajo.

¿Por qué hacer del coste de instalación por unidad una función de la relación entre inversión y capital? Para mantener rendimientos a escala constantes (CRS). Si F ya tiene estos CRS:

$$G(\lambda K_t, \lambda N_t, \lambda I_t, Z_t) = Z_t F(\lambda K_t, \lambda N_t) - \lambda I_t (1 + a(\frac{\lambda I_t}{\lambda K_t})) =$$

## 2 El problema de optimización en una economía abierta

No habría ningún problema especial en resolver el problema de optimización planteado más arriba. (Véase, para un supuesto de tiempo continuo sin incertidumbre, *Econometrica*, de Abel Blanchard, 1983). Pero, a efectos pedagógicos, es mucho mejor enfocar el problema para una economía abierta de pequeño tamaño. (BF, Sección 2-4, en tiempo continuo).

De esta forma resulta más fácil fijarse en las decisiones de consumo e inversión por separado, comprender el comportamiento de la balanza de pagos por cuenta corriente y hacerse una idea de cómo debería comportarse el tipo de interés en la economía cerrada.

La economía es la mencionada más arriba, pero en ella es posible conceder y recibir préstamos a un tipo de interés (bruto) dado, $R_t$ (estocástico o no). Sea $B_t$ la posición de endeudamiento neto del país en un periodo $t$.

El problema de optimización viene expresado por:

$$\max E\ [\sum_{0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+}$$

sujeto a:

$$B_{t+i+1} = C_{t+i} - Z_{t+i}F(K_{t+i}, 1) + I_{t+i}(1 + a\frac{I_{t+}}{K_{t+}}$$

$$K_{t+i+1} = (1-\delta)K_{t+i} + I_{t+i}$$

La economía dispone de dos medios de obtener ahorro futuro: conseguir capital internamente y conceder o pedir préstamos a otros países.

## 3 Condiciones de primer orden

Supongamos que los multiplicadores de Lagrange asociados con la primera restricción sean - $\square^i ?_{t+i}$ (¿por qué definimos un valor negativo?: porque estamos fijándonos en la posición de endeudamiento neto) y los asociados con la segunda restricción, $\square^i \mu_{t+i}$

Escriba la fórmula de Lagrange y diferénciela.

Las dos primeras ecuaciones caracterizan el **comportamiento del consumo:**

$$C_t : \qquad U'(C_t) = .$$

$$B_{t+1} : \qquad \lambda_t = E[\beta R_{t+1}\lambda_t$$

• La utilidad marginal del consumo debe igualar la utilidad marginal de la riqueza.

• La utilidad marginal de la riqueza en la actualidad es igual a la su utilidad marginal prevista para el futuro multiplicada por el tipo de rentabilidad de los bonos, con el descuento correspondiente al factor de descuento. Si, por ejemplo, se pueden conceder y pedir préstamos a un tipo sin riesgo *R*, y si □*R = 1 1* (condición necesaria, cuando el tipo es constante, para que exista el estado estacionario), tenemos que:

$$U'(C_t) = E[U'(C_{t+1}$$

Las dos siguientes ecuaciones describen el **comportamiento de la inversión:**

$$I_t : \qquad \lambda_t(1 + 2a\frac{I_t}{K_t}) = \mu_t$$

$$K_{t+1} : \qquad \mu_t = \beta E[\lambda_{t+1}(Z_{t+1}F_K(K_{t+1}, 1) + a(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})^2\,) \; +$$

• El coste marginal de la inversión multiplicado por la utilidad marginal del consumo en términos de bienes debe ser igual al valor marginal de una unidad de capital instalado.

• El valor marginal del capital instalado es igual al producto marginal del capital en el periodo siguiente, más el valor marginal descontado del capital en el siguiente momento, ajustado a la depreciación. Obsérvese que el producto marginal consta de dos términos: el producto marginal directo, y la disminución marginal del coste de instalación (lo que se deriva del hecho de que, a mayor capital, los costes de instalación decrecen para un nivel de inversión dado.)

Es conveniente definir una nueva variable:

$$q_t \equiv \frac{\mu}{\lambda}$$

Tomemos $q_t$ como el valor marginal sombra del capital instalado en términos de bienes. A continuación, podemos reformular las dos condiciones de primer orden del siguiente modo:

$$(\frac{I_t}{K_t}) = \frac{1}{2a}(q_t - 1)$$

$$q_t = E[\ R_{t+1}{}^{-1}\ \{(Z_{t+1}F_K(K_{t+1},1) + a(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})^2) + (1$$

donde, para obtener la segunda relación, he utilizado el hecho de que:

$$E[\ \lambda_{t+1}/\lambda_t R_{t+1}\beta =$$

Lo que nos da una caracterización simple del comportamiento de la inversión:

- La inversión continúa hasta que el costo marginal de la misma iguala el valor marginal del capital instalado. Si, por ejemplo, $q_t = 1$, la tasa óptima de inversión será entonces igual a cero. ¿Por qué invertir si el valor marginal del capital instalado es igual al coste del bien utilizado para la inversión?

Así pues, la tasa de inversión es una función incremental del valor marginal sombra del capital, o **q marginal**, para abreviar.

- A su vez, q marginal es igual al valor actual previsto del producto marginal del capital. De modo que, si los productos marginales futuros tienen un valor alto, el valor presente de $q_t$ será igualmente alto, y también lo será, por implicación, la inversión.

Asegúrese de que puede resolver la anterior ecuación recursivamente para obtener q marginal como un valor actual previsto.

*Obsérvese que el sistema formado por las dos últimas ecuaciones no es recursivo. Depende de los productos marginales futuros, que dependen del capital futuro; el cual, a su vez, depende del ahorro presente. Pero podemos* *resolverlo empleando los métodos logarítmicos lineales vistos en el material de clase del tema 2.*

*Combine las dos últimas condiciones de primer orden y la ecuación de acumulación:*

$$q_t = E[R_{t+1}{}^{-1}\{(Z_{t+1}F_K(K_{t+1},1) + \frac{1}{4a}(q_{t+1}-1)^2) + \; ($$

$$K_{t+1} = (1 - \delta + \frac{1}{2a}(q_t - 1))K_t$$

*De esta forma obtenemos un sistema de dos ecuaciones en $q_t$, $K_t$,* que podemos resolver de la forma habitual (mediante el método logarítmico lineal, por ejemplo).

En resumen: hemos obtenido una caracterización (relativamente) simple del comportamiento del consumo y la inversión:

- La inversión depende de la q marginal, que a su vez depende de los productos de capital actuales y futuros y, por tanto, de los shocks tecnológicos tanto actuales como previstos. Téngase en cuenta que la decisión de inversión no depende de la función de utilidad de los consumidores.

- El consumo depende del insumo actual y futuro, neto del gasto en inversión. La atenuación y basculación de los consumidores se produce del modo habitual.

## 4 El consumo, la inversión y la balanza de pagos por cuenta corriente en la economía abierta

Partiendo de las restricciones de primer orden, podemos adivinar los efectos de un shock favorable sobre el consumo, la inversión y la balanza de pagos por cuenta corriente. (En el capítulo 2 del texto de Blanchard y Fischer se halla un tratamiento en tiempo continuo y sin incertidumbre).

Veamos qué ocurre con un shock tecnológico favorable.

- En la fase inicial del camino del capital, la q marginal se incrementa, al igual que la inversión. Cuanto más permanente sea el shock, mayor será el incremento.

- El consumo también aumenta. No hay un efecto de basculación ***(tilting)***, ya que *Rt* no se ve afectado. Luego las previsiones de una producción neta de inversión más elevada llevan a un consumo también más elevado.

- De modo que a mayor inversión, mayor consumo. Y también mayor producción. ¿La balanza de pagos por cuenta corriente inicial?

[Relación al trabajo de Jaume Ventura. ]

**5 Papel de la estructura temporal de los tipos de interés en la economía cerrada**

En una economía cerrada, la suma de la inversión más el consumo debe ser igual a la producción. En otras palabras, los tipos de interés presentes y futuros deben generar una trayectoria de consumo e inversión tal que el mercado de bienes se equilibre, previéndose que este equilibrio se mantenga.

Apliquemos esto, por ejemplo, a la previsión de un shock tecnológico favorable en el futuro

- En la secuencia previa de tipos de interés, tanto el consumo como la inversión aumentan.

- Esto no es posible, dado que la producción es invariable en un principio. Si queremos que la inversión inicial aumente, el consumo debe reducirse.

- ¿Qué se logrará con esto? Una suposición: tipos de interés altos en un futuro próximo balancear ***(tilt)*** el consu mo de modo descendente inicialmente, pese al efecto riqueza positivo). Tipos de interés bajos más adelante (de modo que la previsión de esos tipos de interés bajos lleve a un mayor ahorro presente). Incremento de q marginal en el "mercado de valores".

Con la vista puesta en el resto del curso: hemos construido un modelo en el que existe una **relación de demanda global** bien definida y en el que la **estructura temporal de los tipos de interés** desempeña un papel central.

Supongamos que, por la razón que sea, los tipos de interés no se ajustan a este modelo. Luego la demanda global podrá ser mayor o menor. ¿Qué ocurre entonces? Si la oferta se acomoda, habrá fluctuaciones provocadas por cualquiera de los factores que modifique la demanda global.

**6 q marginal y q media e inversión**

Hemos obtenido la inversión como función de un precio sombra con q marginal. Un enfoque más amplio, debido a Tobin, sería considerar que, en realidad, bajo determinadas condiciones, la **q marginal** puede ser igual a la **q media**, siendo éste último el valor medio de una empresa en los mercados financieros, dividido por su capital social.

Con estas presunciones, los valores de ambas qs son iguales. Para comprobarlo:

Pensemos en una empresa que opera en este tipo de economía.
Su valor (después de beneficios en el periodo actual) viene dado por:

$$V_t = E[\,(R_{t+1})^{-1}(\pi_{t+1} + V_t$$

Suponemos que la empresa alquila mano de obra y compra e instala capital. Sea ¼ el valor del flujo de caja tras haber alquilado la mano de obra y comprado e instalado el capital, luego:

$$\pi_{t+1} = Z_{t+1}F(K_{t+1}, 1) - W_{t+1} - I_{t+1}($$

Vamos a demostrar que $V_t/K_{t+1}$ = $q_t$.

(La elección del momento resulta un tanto delicada, pero es el resultado de las convenciones en la materia, según las cuales las empresas deciden en un periodo cuál será el capital social del periodo siguiente. Un comentario también acerca del boletín de ejercicios: Thomas define el valor antes de beneficios, por lo que la relación pasa a ser $(V_t$ - $p_t) = K_{t+1} = q_t$:. Pero se trata de expresiones de la misma relación. En tiempo continuo, la relación se reduce a $V/K = q$).

$$q_t = E[R_{t+1}{}^{-1}(Z_{t+1}F_K(K_{t+1},1) + a(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})^2 + (1$$

Multiplicamos ambos lados por $K_{t+1}$, y obtenemos:

$$q_tK_{t+1} = E[R_{t+1}{}^{-1}\{Z_{t+1}F(K_{t+1},1) - W_{t+1} + a\frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}} + (1$$

Desde la ecuación de acumulación:

$$K_{t+1} = \frac{1}{1-\delta}[K_{t+2}$$

Desde la primera condición de primer orden:

$$q_{t+1}I_{t+1} = (1 + 2a\frac{I_{t+}}{K_{t+}}$$

Sustituyendo en la ecuación de más arriba por $q_tK_{t+1}$:

$$q_tK_{t+1} = E[R_{t+1}{}^{-1}\{Z_{t+1}F(K_{t+1},1) - W_{t+1} - I_{t+1}(1+a\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}$$

Luego,

$$q_tK_{t+1} = V_t$$

Al sustituirlo en la primera condición de primer orden, nos da una relación entre la tasa de inversión y el valor del capital social de la empresa evaluado por los mercados financieros (es decir, entre la inversión y el mercado de valores):

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{2a}(\frac{V_t}{K_{t+1}}$$

Obsérvese que no se trata de una relación causal, sino que es una relación de equilibrio que se mantiene cuando las empresas maximizan su valor.

Deben tenerse en cuenta las presunciones necesarias para obtener la igualdad entre q marginal y q media:

- Rendimientos constantes de la producción.

- Mercados de bienes competitivos. Sin rentas.

- Medida correcta del capital. Intangibles. (¿Empresas de alta tecnología?)

- Valoración correcta de las empresas por los mercados financieros. (¿Burbujas especulativas?)

¿Qué tal funciona? Decentemente, sin más. Y, en cualquier caso, incluso una relación ajustada supondría un progreso limitado. Una relación entre dos variables endógenas.

Prueba. $I/K$ y $q$ a lo largo de los últimos cincuenta años, según datos de Bob Hall.