Sloan School of Management
Massachusetts Institute of Technology

15.010/15.011

CLASE DE REPASO Nº 7

Lo esencial de la teoría de juegos

Viernes - 5 de noviembre de 2004

RESUMEN DE LA CLASE DE REPASO DE HOY

1. **Definiciones de la teoría de juegos:** términos más importantes de la teoría de juegos.
2. **Modelo de Cournot:** qué ocurre cuando dos firmas compiten simultáneamente en la cantidad de producción de un bien homogéneo.
3. **Modelo de Stackelberg:** qué ocurre cuando dos firmas compiten secuencialmente en la cantidad de producción de un bien homogéneo.
4. **Modelo de Bertrand:** qué ocurre cuando dos firmas compiten simultáneamente en el precio de un bien homogéneo.
5. **Ejemplos con números:** aplicación de estos conceptos a ejercicios.

1. DEFINICIONES DE TEORÍA DE JUEGOS

- **1.1 Estrategia dominante**
- **1.2 Equilibrio de Nash**
- **1.3 Estrategia maximín**

1.1 Estrategia dominante

Un jugador posee una estrategia dominante cuando su elección es siempre óptima, independientemente de lo que decida el oponente. Una estrategia es dominante si con ella se obtiene más, o en el peor de los casos, lo mismo que el otro jugador.

1.2 Equilibrio de Nash

En un equilibrio de Nash, cada empresa lo hace lo mejor que puede, dado lo que está haciendo la competencia. Los equilibrios de Nash suelen dar resultados no cooperativos. Cada firma elige la estrategia para maximizar sus beneficios dadas las acciones de sus oponentes. En el equilibrio no hay incentivos para cambiar de estrategia, ya que no se pueden mejorar los pagos.

1.3 Estrategia maximín

Es la estrategia que minimiza el peor de los resultados de un jugador. La pueden utilizar los jugadores preocupados por la racionalidad de su oponente.

2. EL MODELO DE COURNOT

2.1 Definición

2.2 Optimización en el equilibrio de Cournot

2.1 Definición

El modelo Cournot es un juego de un solo período, en el cual dos empresas producen un bien no diferenciado con una curva de demanda conocida. Las dos firmas compiten por elegir sus niveles respectivos de producción **simultáneamente.** Cada una elige Q suponiendo que la producción de su oponente es un dato fijo.

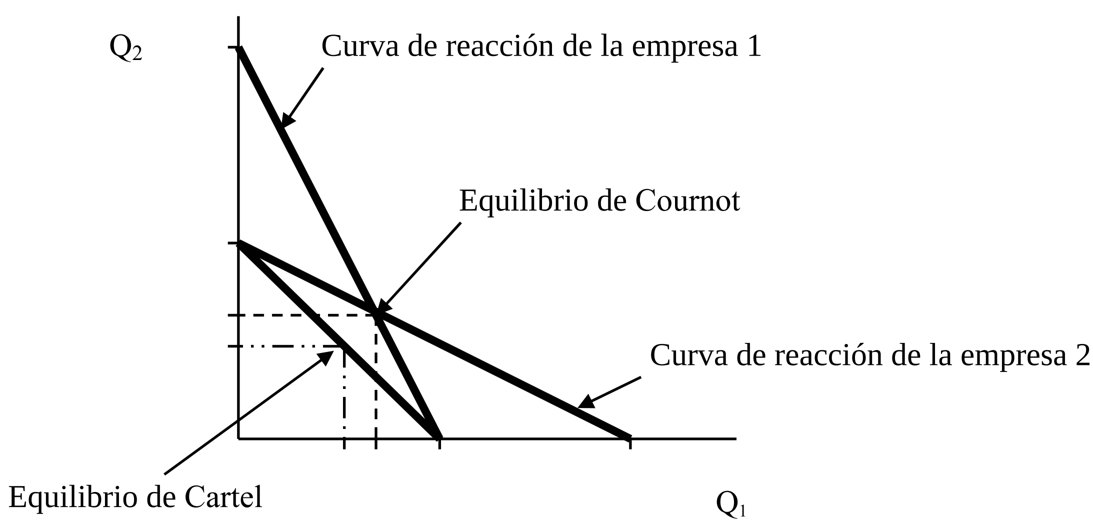
2.2 Optimización en un juego de Cournot

En un juego de Cournot, el equilibrio se obtiene cuando cada empresa asume correctamente la producción de su oponente y elige un nivel de producción Q que maximiza sus propios beneficios. Ninguna de las empresas tiene incentivos para modificar este equilibrio. Así, dada una demanda de mercado de: Q (P) y niveles de producción de dos productores de $Q = Q_1 + Q_2$, entonces, para maximizar beneficios, cada empresa tiene que:

1. Calcular su ingreso marginal en función de Q_1 y Q_2 (utilizando la ecuación $Q = Q_1 + Q_2$)
2. Hacer que este ingreso marginal sea igual al coste marginal
3. Hallar esta cantidad. Así, el nivel óptimo de cantidad para cada compañía vendrá dado por una ecuación que está en función de la cantidad de la otra firma. Esta ecuación se llama **curva de reacción** e ilustra el nivel óptimo de cantidad de cada firma, dadas las otras cantidades producidas:

$$Q_1^* = f(Q_2) \text{ y } Q_2^* = f(Q_1)$$

Gráficamente:



NOTA: un equilibrio de Cournot es un ejemplo de un equilibrio de Nash.

3. EL MODELO STACKELBERG
3.1 Definición
3.2 Optimización en el modelo Stackelberg

3.1 Definición

Se trata de un juego de un período, en el que dos empresas producen un bien no diferenciado con una demanda conocida. Ambas han de competir por elegir la cantidad de producción Q_1 y Q_2, pero **una de ellas elige primero**.
La Firma 2 puede observar lo que la Firma 1 ha escogido para Q_1, y elegir Q_2 en consecuencia para maximizar sus beneficios. Además, la Firma 1 sabe que la Firma 2 aplicará esta estrategia ya que puede confiar en la racionalidad económica de la otra empresa.

3.2 Optimización en el modelo Stackelberg

En un modelo Stackelberg, el equilibrio se alcanza cuando la Firma 1, adelantándose a su competidor, amplía la producción y se asegura mayores beneficios. De ahí el término "**la ventaja de ser el primero**". De hecho, la Firma 2 se ve obligada a reducir la producción, dado que el líder (Firma 1) ya ha producido una gran cantidad (cuando una produce más, el otro reacciona produciendo menos).

4. EL MODELO BERTRAND
- **4.1 Definición**
- **4.2 Optimización en el modelo Bertrand**

4.1 Definición

Cuando dos firmas venden un bien homogéneo y han de elegir el nivel óptimo de precios (P_1 y P_2) para estos bienes, podemos utilizar el modelo Bertrand para analizar la situación.

4.2 Optimización en el modelo Bertrand

Con bienes homogéneos, los consumidores, sin duda, comprarán el bien de la empresa que ofrece el precio más bajo. Por tanto, cada empresa tiene el incentivo de vender un poquito por debajo del precio de su oponente y capturar toda la demanda.
Así, el equilibrio se alcanza cuando cada firma establece:

$$\mathbf{P=MC}$$

ya que cada firma sabe que venderá más bajo que su oponente con tal de que sea economicamente viable (en otras palabras, venderán más bajo que su oponente con tal de que rebajar el precio no suponga incurrir en pérdidas. Tenga siempre en cuenta que estamos asumiendo un comportamiento racional por parte de las empresas).

NOTA: si los productos se diferenciasen el equilibrio se alcanzaría para los precios por encima del MC y las firmas podrían obtener beneficios (un precio más bajo no afectaría a toda la demanda). Igualmente, si el juego fuese secuencial y los bienes estuvieran diferenciados, el segundo en actuar tendría una ventaja significativa sobre el primero. **Observe también que para las empresas es mucho mejor competir en la cantidad, como en un modelo Cournot, que en el precio**, lo que se debe a que cuando compiten en precios, estos se igualan a los costes marginales y, por lo tanto, los beneficios económicos descienden.

5. EJEMPLOS CON NÚMEROS

5.1 Ejemplos de la teoría de juegos
5.2 Ejemplos de juegos de Cournot
5.3 Ejemplo de un juego de Stackelberg

5.1 Ejemplos de la teoría de juegos

5.1.1 Relaciones comerciales EE.UU - Japón

Problema 7 del capítulo 13 en P&R. *Ambos países están estudiando normas de actuación para abrir o cerrar sus mercados de importación. La matriz de pagos se muestra a renglón seguido [Pago de EE.UU., Pago de Japón].*

EE.UU.	Japón Abierto	Cerrado
Abierto	10,10	5,5
Cerrado	-100,5	1,1

a. *Asuma que cada país conoce la matriz de pagos y cree que el otro país actuará en su propio interés. ¿Tiene cada país una estrategia dominante? ¿Cuáles serán las normas de equilibrio si cada país actua racionalmente para maximizar su bienestar?*

Estrategia dominante

- Japón: elegirá abrir su mercado al margen de lo que EE.UU. decida (es siempre la decisión que maximiza el beneficio).
- EE.UU.: siempre elegirá abrir su mercado al margen de lo que Japón decida.

Equilibrio

- El equilibrio dictado por las dos estrategias dominantes es que ambos países abran el mercado de importación. Se trata de un equilibrio de Nash. ¿Por qué?

b. *Ahora pensemos que Japón no está seguro de que EE.UU. se comporte racionalmente. En particular, a Japón le preocupa que los políticos estadounidenses quieran penalizarles aunque con esa conducta no maximicen el bienestar de EE.UU. ¿Cómo afectaría esto a la elección de estrategia de Japón? ¿Podría cambiar el equilibrio?*

En este caso Japón optaría por la estrategia maximín (la estrategia que maximiza la producción de Japón suponiendo que EE.UU se comporta irracionalmente). Y resulta que esta estrategia consiste en seguir manteniendo abierto su sector de importación. Un mercado de importación japonés abierto sería peor para EE.UU y, por tanto, la situación acabaría por volver al escenario de ambos mercados abiertos.

5.1.2 Ordenadores

Ejercicio 3 del capítulo 13 en P&R. *Dos empresas de ordenadores, A y B, planean comercializar sistemas de red para la gestión de la información en la oficina. Cada una puede fabricar un sistema rápido y de alta calidad (H), o uno lento y de baja calidad (L). El estudio de mercado indica que los beneficios resultantes para cada firma en función de la estrategia escogida vienen dados por la siguiente matriz de pagos: [pago A, pago B]*

Firma A	Firma B H	L
H	30,30	50,35
L	40,60	20,20

a. *¿Tiene algún jugador una estrategia dominante? ¿Cuál es el equilibrio de Nash?*
- De la matriz de pagos se desprende que ninguno tiene una estrategia dominate. Existen los dos equilibrios de Nash marcados.

b. *¿Cuál será el resultado si ambos buscan estrategias maximín? ¿Tiene sentido esta estrategia? (¿la elegirían los competidores?)*

- Comencemos con la Firma A. La estrategia maximín trata de evitar el peor resultado posible (Baja / Baja, o 20$). La Firma A elegiría fabricar sistemas de calidad alta para evitar el peor de los panoramas posibles.
- Igualmente, la Firma B evitará también su peor panorama (Baja / Baja, o 20$). También elegirá producir sistemas de alta calidad.
- El resultado si ambas firmas buscan una estrategia maximín sería Alta-Alta, éste es subóptimo comparado con el posible equilibrio de Nash. Sin embargo, como se trata de un juego simultáneo, la coordinación entre los jugadores podría ser difícil, lo que es muy importante ya que ningún jugador tiene una estrategia dominante.
- La estrategia maximín puede ser adecuada en juegos simultáneos donde la coordinación es difícil de lograr.

c. *¿Cual sería el resultado si A elige primero la estrategia? ¿Y si B elige primero?*

- Si A elige primero: A sabe cual será la respuesta de B en el caso de que opte por alta o baja calidad. A elegiría el resultado que le rindiese el mayor pago posible (producir Alta calidad, forzando a B a producir Baja).
- Si B elige primero: igualmente, B sabe cual será la respuesta de A en el caso de que opte por alta o baja calidad. B elegiría el resultado que le rindiese el mayor pago posible (producir Alta calidad, forzando a A a producir Baja).
- Este resultado es similar al modelo Stackelberg; el primero en elegir tiene ventaja.

d. *Empezar con ventaja cuesta dinero; piense en un juego de dos etapas en el que, en la 1 etapa cada firma paga una cantidad para ser el primero en elegir. ¿Qué firma pagará más? ¿Qué firma acabará siendo la primera en elegir?*

- La firma B está dispuesta a gastar 25$ (60-35) para elegir primero y la Firma A no desea gastar más de 10$ (50-40) para elegir primero. Por tanto, la Firma B tiene más posibilidades que la A. De hecho, a la Firma B le bastaría con ofrecer $11 para obtener la opción de elegir primero.

5.1.3 Compromiso y credibilidad

En la página 481 de P&R hallará un análisis detallado de este caso. *Se trata de un juego secuencial en el cual Race Car Motors es el líder. Decide que clase de autos construir y Far Out Engines decide después que clase de motores fabricar. La siguiente matriz de pagos muestra los posibles resultados de este juego. [Far Out Engines, Race Car Motors]*

	Race Car Motors	
Far Out Engines	Autos pequeños	Autos grandes
Motores pequeños	3,6	3,0
Motores grandes	1,1	8,3

Race Car Motors obtendría mejores resultados produciendo autos pequeños y sabe que Far Out Engines reaccionará fabricando motores pequeños. Far Out Engines, sin embargo, preferiría el resultado de la esquina inferior derecha de la matriz de pagos. ¿Puede inducir a Race Car Motors a producir autos grandes en lugar de pequeños?

- Far Out Engines puede amenazar con producir motores grandes; sin embargo, esta amenza no es creíble, ya que una vez que Race Car elige producir autos pequeños no hay incentivos para que Far Out produzca motores grandes.
- Lo que Far Out Engines podría hacer para que su amenaza resultase creíble es reducir de modo irreversible sus pagos derivados de producir motores pequeños. Por ejemplo, pude cerrar su capacidad de producción de motores pequeños.
- ¿Cuál es el nuevo equilibrio si Far Out Engines cierra defnitivamente su capacidad de producción de motores pequeños?

	Race Car Motors	
Far Out Engines	Autos pequeños	Autos grandes
Motores pequeños	0,6	0,0
Motores grandes	1,1	8,3

5.2 Ejemplos del equilibrio de Cournot
5.2.1 Ejemplo visto en la clase de ayer
Imaginemos que dos empresas afrontan una curva de demanda de:

$P = 60 - Q$

Y ambas tienen costes marginales igual a cero ($MC_1 = MC_2 = 0$)
La producción total en el sector sera de $Q_{TOT} = Q_1 + Q_2$

Para maximizar beneficios, la firma 1 tendrá que realizar los siguientes cálculos:
En primer lugar establecerá que MR = MC

donde el MR se calcula así:

$$\begin{aligned} R_1 = PQ_1 &= (60 - Q)Q_1 \\ &= 60Q_1 - (Q_1 + Q_2)Q_1 \\ &= 60Q_1 - (Q_1)^2 - Q_2Q_1 \end{aligned}$$

y:

$MR_1 = dR_1/dQ_1 = 60 - 2Q_1 - Q_2$

Estableciendo $MR_1 = MC = 0$, la primera empresa puede calcular su curva de reacción:

$$\mathbf{Q_1 = 30 - ½\, Q_2}$$

Del mismo modo, la curva de reacción para la segunda empresa, teniendo en cuenta la simetría en la estructura de costes, sería:

$$\mathbf{Q_2 = 30 - ½\, Q_1}$$

Por tanto, el equilibrio se alcanzará cuando las dos curvas de reacción sean iguales (ya que las curvas de reacción son exáctamente simétricas), o cuando:

$Q_1 = Q_2$

El nivel de equilibrio sea: $Q_1 = Q_2 = 20$
La cantidad total producida sea: $Q = Q_1 + Q_2 = 40$
El precio óptimo sea: $P = 60 - Q = 20$
Y el beneficio de la firma sea: $\Pi_1 = \Pi_2 = 20 \cdot 20 = 400$

5.2.2 El mercado de camisetas en el equilibrio de Cournot
Es usted el director general de una firma que produce camisetas para la C-Function latina (la "Mejor C-Function" del año según Boston Magazine). Imagine que desarrolla su actividad en régimen de duopolio. Tanto usted como su competidor han de decidir cuántas camisetas producir. (Hay un intervalo entre el inicio y la finalización de la producción de las camisetas). Una vez decidida la cantidad de producción, no puede corregir su decisión ni producir una segunda partida de camisetas (esto es, es un "juego" de una sola vez). Suponga que tanto las camisetas que usted fabrica como las de su competidor son iguales (esto es, productos homogéneos).

Existe un estudio de mercado (al que tanto usted como la competencia pueden acceder) que analiza la demanda de estas camisetas. La demanda del mercado viene dada por la ecuación:

$Q=100-P$
p.e. $P=100-Q = 100 - (Q_1+Q_2) = 100 - Q_1 - Q_2$
Usted y su competidor tienen costes marginales constantes iguales a $\mathbf{MC_1=MC_2=10}$

¿Cuántas camisetas debería producir?

En el modelo de Cournot, cada firma asume que la producción de la competencia es fija y elige una cantidad que maximice sus propios beneficios. Dada esta suposición, podemos calcular la función de reacción de cada firma. (Imagine que la mejor función de respuesta es la cantidad óptima para la Firma 1, Q_1 , dado que la Firma 2 escoge la cantidad Q_2). Para ello, tenemos que calcular en primer lugar la función de ingreso marginal de la Firma 1 MR_1

$TR_1 = P * Q_1 = (100 - Q_1 - Q_2) * Q_1$

$MR_1 = dTR_1 / dQ_1 = 100 - 2*Q_1 - Q_2$

Para maximizar el beneficio de la Firma 1, establezca MR_1 igual a MC_1.

⇨ $100 - 2 * Q_1 - Q_2 = 10$
⇨ $\mathbf{Q_1^* = 45 - 0,5 * Q_2}$

Esta ecuación es la **curva de reacción de la Firma 1**; permite calcular la Q_1 óptima dado cualquier nivel de Q_2. Así, si la Firma 1 cree que su oponente producirá $Q_2 = 22,5$ unidades, debería producir una Q_1 igual 33,75. Si la Firma 1 cree que $Q_2 = 45$, entonces debería producir $Q_1 = 22,5$.

Igualmente, puede derivar la **curva de reacción de la Firma 2** (es simétirca, a mismos costes y misma demanda).

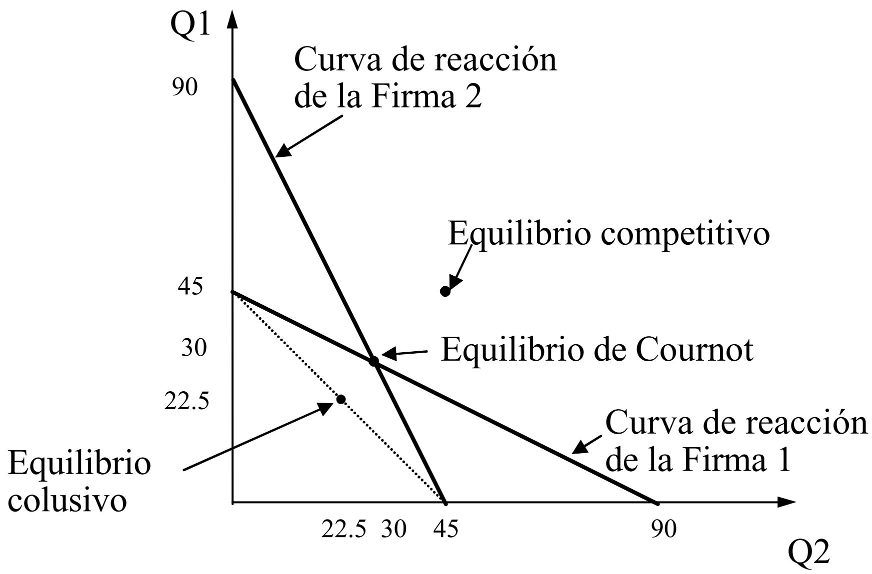
$\mathbf{Q_2^* = 45 - 0,5 * Q_1}$

En clase aprendimos que el equilibrio de Cournot (que es también un equilibrio de Nash) viene dado por la intersección de dos funciones de reacción. Tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y puede hallar Q_1^* y Q_2^*.

Comience con la función de mejor respuesta de la Firma 1:
$Q_1^* = 45 - 0.5 * Q_2$

E inserte la función de mejor respuesta de la Firma 2 :
$Q_1^* = 45 - 0,5 * (45 - 0,5 * Q_1)$
⇨ $Q_1^* = 30$

Sustituya de nuevo en la ecuación $Q_2^* \Rightarrow Q_2^* = 30$



En el equilibrio de Cournot cada firma hace lo máximo considerando la decisión de producción de la otra. No existe incentivo para producir más o menos, ya que ambas maximizan su beneficio (dada la producción de la otra firma).

Ahora los precios y los beneficios son iguales a:
P = 100-(30+30)
⇒ **P* = 40**

$\pi_1 = TR_1 - TC_1 = P^*Q_1^* - 10^*Q_1 = 40^*30 - 10^*30 = \underline{\mathbf{900}}$

Por simetría $\underline{\pi_2 = \mathbf{900}}$

Aún no está convencido de que producir 30 unidades sea la decisión óptima. Examinemos la siguiente matriz de pagos, en ella se muestran los beneficios de la Firma 1 y de la Firma 2 para una determinada combinación de producción Q_1 y Q_2. Aquí hemos elegido cuatro niveles de producción diferentes para cada firma y calculado los beneficios resultantes. De usted depende confirmar estas cifras. (Nota: el concepto de matriz de pagos es una herramienta habitual en la teoría de juegos. En las próximas semanas se repasará este concepto con diversos ejemplos).

Algunas convenciones generales: las decisiones de la Firma 1 están en la primera columna (en este caso desiciones sobre cantidad). Las decisiones de la Firma 2 están en la primera fila. El pago de la Firma 1 está a la izquierda de cada celda y el de la Firma 2 a la derecha. El subrayado indica la decisión óptima de una firma dada la decisión de la otra (p.e. la Firma 2 elige 22,5, así que la mejor decisión para la Firma 1 sería 33,75 lo que arroja un beneficio de 1139,1).

		Producción de la Firma 2			
		22.5	30	33.75	45
Producción	22.5	1012.5, 1012.5	843.8, 1125.0	759.4, <u>1139.1</u>	<u>506.3,</u> 1012.5
Firma 1	30	1125.0, 843.8	<u>900.0,</u> <u>900.0</u>	<u>787.5,</u> 885.9	450.0, 675.0
	33.75	<u>1139.1,</u> 759.4	885.9, 787.5	759.4, 759.4	379.7, 506.3
	45	1012.5, <u>506.3</u>	675.0, 450.0	506.3, 379.7	0.0, 0.0

Equilibrio de Cournot (Equilibrio de Nash)

¿Cómo podemos calcular la mejor decisión de producción a partir de esta matriz de pagos? Supongamos que espera que su competidor produzca una cantidad de 22,5 unidades. ¿Dada esta conjetura, debería usted producir también 22,5 unidades? No, en este caso obtiene un beneficio produciendo 33,75 unidades ($\pi_1 = 1139$). Con este dato, ¿por qué debería producir su competidor 22,5? Si suponemos que usted producirá 33,75, el competidor producirá 30 unidades para maximizar su beneficio. Suponiendo que su competidor producirá 30 unidades, usted decide producir también 30 unidades. El equilibrio de Cournot $Q_1 = 30$, $Q_2 = 30$ es el único resultado racional.

5.3 Ejemplo de un juego de Stackelberg

Examinemos de nuevo el ejemplo de producción de camisetas. Supongamos también que es usted el primero en elegir la cantidad producida. Ahora puede tener en cuenta la función de reacción de su oponente. La decisión de producción de la Firma 2 vendrá determinada por su producción. Del anterior ejemplo, conoce usted la función de reacción de su oponente:

$$Q_2^* = 45 - 0.5 * Q_1 \qquad \text{Eqn. (I)}$$

Con esta información puede calcular su función de ingreso marginal:

$$TR_1 = P * Q_1 = (100 - (Q_1 + Q_2)) * Q_1$$

Sustituya la Ecu. (I) – Esta sustitución es necesaria porque desea tener en cuenta la reacción de su competidor si usted establece primero la cantidad. Si fija una cantidad de = Q_1, su competidor establecerá una cantidad dada por la Ecu. I.

$$TR_1 = (100 - (Q_1 + 45 - 0.5 * Q_1)) * Q_1$$
$$= 55 * Q_1 - 0.5*Q_1^2$$

$$\Rightarrow MR_1 = dTR_1 / dQ_1 = 55 - Q_1$$

Para maximizar su beneficio establezca MR_1 igual a MC_1:

$$\Rightarrow 55 - Q_1 = 10$$
$$\Rightarrow \underline{\mathbf{Q_1 = 45}}$$

Insertando este número en la Ecu. (I), la Firma 2 producirá **$Q_2 = 22.5$ uds**. El beneficio es **$\pi_1 = 1012.5$** y **$\pi_2 = 506$**. Obtiene mejor resultado fijando primero su nivel de producción, así tiene la ventaja de ser el primero. Fijando primero el nivel de producción puede apoderarse del mercado. Si se ha comprometido a producir 45 camisetas, su competidor no tiene otro remedio que aceptar ese hecho y se ve forzado a producir menos, suponiendo que quiera maximizar su beneficio.