

Trabajo en casa 5

15.053 Introducción a la optimización

Oficialmente, debe entregarse el martes 19 de marzo de 2002, pero se podrá presentar el jueves 21, antes de la 1 pm **sin que** se considere fuera de plazo. (Puede entregarlo en clase, o bien dárselo a Verónica Mignott en el despacho E40-149).

1. BHM, ejercicio 1 de la página 192. (El ejercicio visto en clase consistía en hallar el dual de un problema de maximización. El del libro de texto, en cambio, se refiere al modo de hallar el dual de un problema de minimización. Por otro lado, para el apartado 1a, puede hallar el problema de maximización cuyo dual es el programa lineal del apartado a, lo que supone aplicar el dato de que el dual del dual es el primal.

2. BHM, ejercicio 3 de la página 192.

3. Partimos de la siguiente matriz de resultado, que se diferencia de la vista en clase en que comprende una columna adicional. Las cifras representan los resultados para el jugador de filas R.

-2	1	2	2
2	-1	0	-1
1	0	-2	-1

a. Formule un programa lineal que sirva para hallar la estrategia mixta óptima para el jugador de filas R.

b. Formule un programa lineal que sirva para hallar la estrategia mixta óptima para el jugador de columnas C.

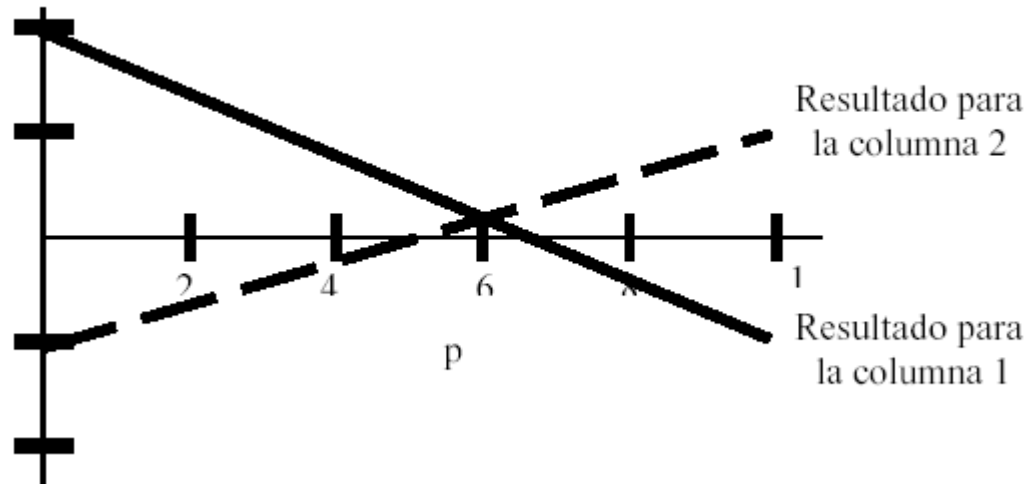
c. Verifique que el programa lineal del apartado b es el dual del programa lineal del apartado a.

d. Modifique la hoja de cálculo Excel vista en clase (que se halla en el sitio web de la clase dentro del apartado "Material de clase") de modo que se pueda emplear para hallar la solución óptima de los programas lineales de los apartados a y b. Tome la estrategia mixta óptima para R y fíjese en los resultados del jugador de columnas. Observará que, al contrario de lo que vimos en clase, todos los resultados no coinciden.

4. (Solución gráfica a los problemas de teoría de juegos). En los supuestos de juegos de suma cero entre dos personas en los que sólo haya dos filas, la solución aleatoria óptima para el jugador de filas puede hallarse gráficamente. Del mismo modo, cuando sólo hay dos columnas, dicha solución puede hallarse para el jugador de columnas mediante un método gráfico. Veamos, por ejemplo, el problema basado en la siguiente matriz de resultado:

$$\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 \end{array}$$

Supongamos que el jugador de las filas elige la fila 1 con una probabilidad p y la fila 2 con una probabilidad $1-p$. El jugador de las columnas podrá, a su vez, hacer dos elecciones, que representaremos gráficamente como una función de p :



Si el jugador de filas anuncia al jugador de columnas su estrategia aleatoria, éste elegirá la columna 1 o la 2, dependiendo de cuál de ellas suponga el peor resultado para su rival. Por ejemplo, si $p = 0,2$, el jugador de columnas elegirá la columna 2. Si $p = 0,8$, elegirá la columna 1.

- ¿Qué forma funcional tendrá el resultado si se elige la columna 1? (Resultado $1 = a_1p + b_1$. ¿Qué son a_1 y b_1 ?) ¿Qué forma funcional tendrá el resultado si se elige la columna 2? ¿Qué resultado obtendrá el jugador de las filas si elige $p = 0,2$? ¿Y si elige $p = 0,8$?
- ¿Cuál será el valor óptimo de p para el jugador de filas, es decir, qué valor maximiza su resultado? ¿Qué es el resultado?
- Supongamos que el jugador de columnas anuncia que su estrategia va a consistir en elegir la columna 1 con una probabilidad q y la columna 2 con una probabilidad $1-q$. Realice un análisis gráfico correspondiente al jugador de columnas similar al que se muestra más arriba. ¿Cuál será el valor óptimo de q para el jugador de columnas, y qué resultado obtendrá el de filas? ¿Deberá coincidir con el resultado del apartado b?

Si lo desea, puede comprobar sus respuestas a los apartados b y c resolviendo los programas lineales para ambos jugadores.

5. (Créditos extra) Este problema es una versión MUY simplificada del juego del póquer, y

tiene por objeto ilustrar la importancia que en dicho juego tienen los llamados "faroles"; aunque, por otra parte, se trate de un análisis sorprendentemente complejo para un juego tan sencillo. Para resolver este ejercicio no es necesario conocer las reglas del póker. En realidad, se trata prácticamente de un ejemplo de teoría de juegos de suma cero entre dos personas, aunque con la importante particularidad de que se incorpora la incertidumbre de una forma bastante novedosa.

La partida la juegan dos personas: usted, que es quien reparte las cartas; y su rival, a quien llamaremos B, y que es quien dobla las apuestas, recurriendo a menudo a "faroles".

Usted le da a B una carta, que puede ser un 3, un 4, un 5, un 7, o un 8, con una probabilidad de $1/5$ para cada una de ellas. A su vez, usted recibe un 6, y B lo sabe. (En esta partida, la persona que da siempre recibe un 6). En la versión del juego en la que no hay posibilidad de doblar, usted gana un dólar si su carta es más alta que la de B, lo que quiere decir que su probabilidad de ganar es de $3/5$. Es decir, en esta versión, su resultado previsto será $3/5 \times 1 \$ + 2/5(-1 \$) = 0,2 \$$.

En la versión del juego en la que sí se dobla, B mira la carta que recibe (y que usted no puede ver), tras lo cual puede doblar la apuesta. Si lo hace, usted puede aceptar la apuesta doblada o bien "rajarse" (es decir, no aceptarla). Si no toma la apuesta, pierde un dólar, sea cual sea la carta que tenga B. En cambio, si acepta la apuesta doblada, gana dos dólares si su carta es más alta que la de B y los pierde si es más baja.

Supongamos, por ejemplo, que B recibe un 3 y dobla la apuesta. B sabe que tiene un 3, pero usted no puede ver la carta que le ha dado. Si usted se raja (porque piensa que B puede llevar un 7 o un 8), perderá un dólar, pero si acepta el envite (porque piensa que B está doblando su apuesta sin llevar una buena jugada), ganará dos. En este caso, B perderá un dólar si no dobla su apuesta. (En póquer, se llama "meter un farol" a hacer una apuesta alta cuando se llevan malas cartas. En cualquier caso, en adelante no emplearemos más esta expresión).

La siguiente tabla nos muestra los posibles resultados:

Evento	Probabilidad	B dobla su apuesta	Usted se raja	Resultado para B
3, 4 ó 5	$3/5$	Sí	Sí	\$1
		Sí	No	-\$2
		No	No	-\$1
7 u 8	$2/5$	Sí	Sí	\$1
		Sí	No	\$2
		No	No	\$1

Supongamos que B le comunica su estrategia, consistente en doblar la apuesta siempre que tenga un 7 o un 8, y doblarla la proporción p de las veces en las que tenga un 3, un 4 o un 5 (es decir, cuando lleve una mala jugada). Por último, no dobla la apuesta la proporción $(1-p)$ de las veces en las que reciba un 3, un 4 o un 5.

Analice cuál será el resultado para B si usted adopta una estrategia simple de aceptar todas las apuestas dobladas. Este resultado, tomando un valor fijo para p , será el siguiente:

Resultado previsto para B cuando recibe 7/8: $2/5 (2)$

Resultado previsto para B cuando recibe 3/4/5: $3/5 [(p)(-2) + (1-p)(-1)]$.

Luego el resultado total para B si usted le acepta todas las apuestas dobladas será: $1/5 - 3/5p$.

Veamos ahora cuál es el resultado para B si usted adopta una estrategia simple de no aceptar ninguna de las apuestas dobladas. Tomando un valor fijo para p , dicho resultado será el siguiente:

Resultado previsto para B cuando recibe 7/8: $2/5 (1)$

Resultado previsto para B cuando recibe 3/4/5: $3/5 [(p)(1) + (1-p)(-1)]$.

Luego el resultado total para B si usted le acepta todas las apuestas dobladas será: $-1/5 + 6/5 p$.

a. Utilice el método gráfico para determinar el valor óptimo de p . (Sobre el empleo del método gráfico, véase el problema número 4).

b. Ahora nos olvidaremos de la estrategia aleatoria de B y examinaremos el problema desde su punto de vista, suponiendo que usted adopta la siguiente estrategia aleatoria: si b no dobla la apuesta, a usted le da lo mismo; y si la dobla, usted acepta con una probabilidad q , y no acepta con una probabilidad $(1-q)$.

En respuesta a la estrategia que usted plantea, B puede adoptar dos estrategias simples: (1) doblar la apuesta siempre, o (2) doblarla si tiene un 7 o un 8 y no doblarla en los demás casos. Utilice el método gráfico para representar, como una función de q , el resultado para B en cada una de estas dos estrategias. A continuación, determine el valor óptimo de q para usted, así como el resultado óptimo. PISTA: la respuesta debería coincidir con la del apartado a.

Ahora que ha analizado el juego, pruebe a jugar con un amigo (eso sí, jugando con puntos, no con dinero).

Observación: este problema pone de relieve la eficacia de las estrategias aleatorias en los juegos. Si la estrategia de B consistiera en doblar la apuesta únicamente con un 7 o un 8, usted no aceptaría ningún envite, y B sólo ganaría cuando tuviera un 7 o un 8. En cambio, obtiene un resultado mucho mejor si dobla la apuesta ocasionalmente con un 3, un 4 o un 5, ya que sabe que de este modo le obliga a usted a aceptar algunas veces.