Trabajo en casa 6

15.053 Introducción a la optimización

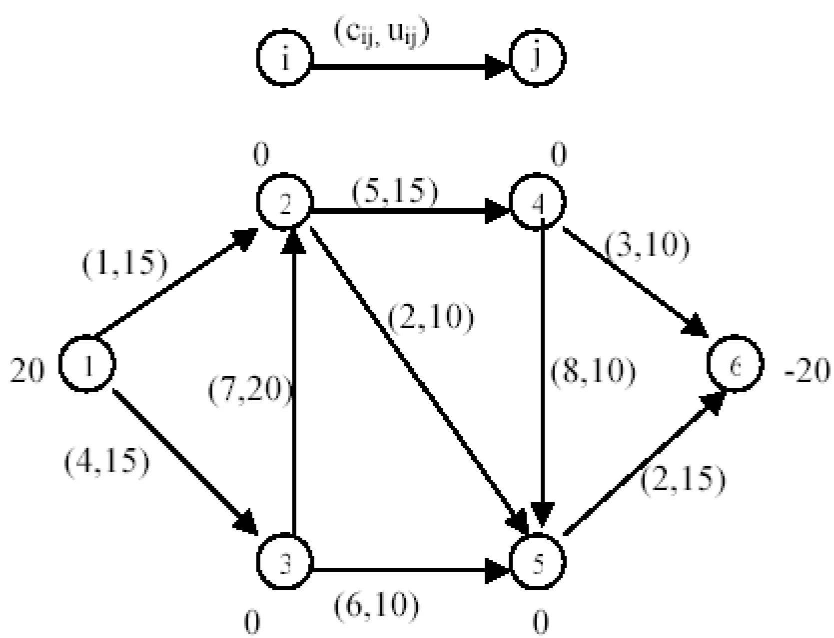
Para entregar al inicio de la clase del jueves 11 de abril de 2002.

1. Considere el problema de flujo de coste mínimo que se muestra en el diagrama que hay más abajo.

Comience con el siguiente árbol de expansión. ***T*** = {(1,2), (3,2), (2,5), (4,5), (4,6)}. Sea ***U*** = {(1,3), (2,4), (5,6)} el conjunto de arcos sin árbol a su límite máximo. Sea ***L = {(3,5)}*** el arco sin árbol que se encuentra inicialmente en su límite mínimo.

a. Halle la solución factible básica inicial.
b. Halle el conjunto inicial de potenciales de nodo, tal que los costes reducidos de los arcos en ***T*** sean 0.
c. Seleccione el arco sin árbol que más incumpla las condiciones de optimalidad y añádalo a ***T*** para crear un ciclo básico. Determine cuánto flujo se puede enviar por todo el ciclo, indicando el arco que deja la base. Formule la nueva solución factible básica, a la que denominaremos T', U', *L'*.
d. ¿Cuáles son los potenciales de nodo para T' ? ¿Y los costes reducidos de los arcos sin árbol? ¿Se trata de una solución óptima? Si no lo es, ¿qué arco es el que más incumple sus condiciones de optimalidad?

Indique todos los pasos que haya seguido. (Puede resultarle útil volver a dibujar, para cada apartado, el árbol de expansión existente).



2. Observe la siguiente matriz fraccionada, cuyas filas suman 6.41, 14.15, 6.74, y 5.45. Las sumas de las columnas dan como resultados 8.98, 6.43, 8.66, y 8.68. En general, llamaremos a_{ij} al componente de la fila i y la columna j, siendo Ri la suma de la fila i, y Cj la suma de columna de la columna j.

0,95	0,20	2,23	3,04
4,57	3,57	2,73	3,27
1,80	2,35	0,50	2,09
1,66	0,30	3,21	0,28

Queremos ahora definir una nueva matriz con los coeficientes a'_{ij} y sumas de filas R' y C' que presente las siguientes propiedades:

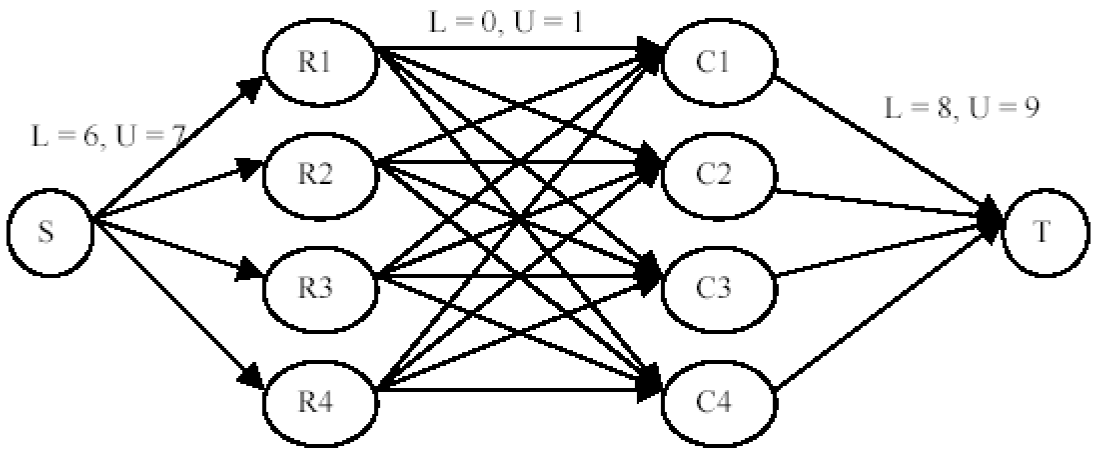
i. a'_{ij} es un valor entero para todo i y j, y $|a_{ij} - a'_{ij}| < 1$ para todo i y j. (Por tanto, a'_{ij} se obtendrá redondeando a_{ij} hacia arriba o hacia abajo.)
ii. $|R'i - Ri| < 1$ para todo i. (Es decir, la suma de fila R'i equivale al valor de Ri redondeado hacia abajo o al de Ri redondeado hacia arriba.)
iii. $|C'i - Ci| < 1$ para todo i. (Es decir, la suma de columna C'i equivale al valor de Ci redondeado hacia abajo o al de Ri redondeado hacia arriba.)

Así, por ejemplo, la matriz de la siguiente tabla (parcialmente rellenada) cumple las restricciones para cada uno de los coeficientes incluidos en ella, y también para la fila 1, cuya suma de fila es 7 (un valor menor que cualquiera de 6.41) y para la columna 3, cuya suma de columna es 8 (la suma de columna de la matriz original es 8.66).

1	1	2	3
?	?	2	?
?	?	0	?
?	?	4	?

a. Halle una solución factible, ya sea manualmente o mediante Excel.

Podemos formular este problema como un problema de flujo de red. En él x_{ij}, que definiríamos como el coeficiente de la fila i y la columna j en la matriz redondeada, representa el flujo en los arcos medios de la figura de más abajo, donde i = 1...4 para las filas y j = 1…4 para las columnas. Los arcos de la parte izquierda representan las sumas de fila admisibles, y los de la derecha, las sumas de columna admisibles.

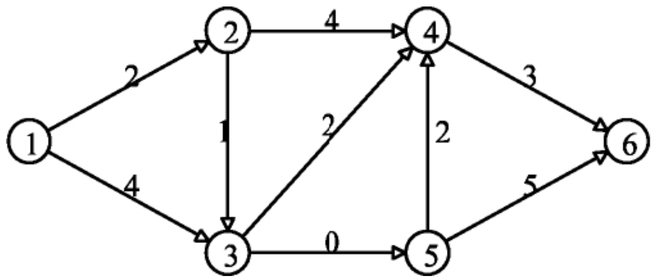


b. Formule el problema consistente en hallar un redondeo factible, de tal modo que la cantidad total redondeada sea lo más pequeña posible. Supongamos, por ejemplo, que la matriz A representa la matriz original no entera. En la solución parcial, hemos redondeado el coeficiente a_{11} de 0,95 a 1, incurriendo en un coste de 0,05. Si el redondeo hubiera sido de 0,95 a 0, el coste habría sido 0,95. En este problema, asumiremos que todos los coeficientes a_{ij} se hallan entre 0 y 1. (Dicho de otro modo, no tendremos en cuenta las partes enteras.) Tenemos, por tanto, la misma matriz que vimos antes, pero sólo con las partes fraccionarias.

0,95	0,20	0,23	0,04
0,57	0,57	0,73	0,27
0,80	0,35	0,50	0,09
0,66	0,30	0,21	0,28

No es preciso hallar la solución óptima, basta con formular el problema como un problema de flujo de coste mínimo. Indique los costes como una matriz 4 x 4.
PISTA: x_{11} indica el coeficiente que se obtiene al redondear a_{11}. Si $x_{11} = 0$, el coste será 0,95. Si $x_{11} = 1$, será 0,5. No hay ningún otro valor factible para x_{11}. Al aplicar una función lineal a estos dos costes obtendremos la función de costes $-0{,}9\, x_{11} + 0{,}95$, de donde $c_{11} = -.9$. Si lo desea, podemos dejar de lado la constante 0,95 (así como las demás constantes) al formular el problema del flujo de coste mínimo.

3. Halle el camino más corto desde el nodo 1 a todos los demás nodos del diagrama siguiente, aplicando el algoritmo de Dijkstra tal y como se vio en los apuntes de clase. Indique todos los pasos, explicando cada iteración (inicio, obtención de la etiqueta mínima y actualización de (i)) y mostrando los resultados de cada operación.



4. Mildred ha decidido alquilar su apartamento durante el próximo año, desde el 1 de enero ("día 1") hasta el 31 de diciembre ("día 365"), y ya ha recibido un gran número de ofertas. Cada una de ellas tiene la forma p_{ij}, lo que significa que la persona está dispuesta a pagar p_{ij} dólares por alquilar el apartamento desde las 3 de la tarde del día i hasta el día j a las 10 de la mañana. El día en que llega un nuevo arrendatario, Mildred emplea el periodo entre 10 de la mañana y 3 de la tarde en poner en orden el apartamento. Sea A = {(i,j) : hay una oferta de alquiler desde el día i al día j.}. Para simplificar, supondremos que existe como máximo una oferta desde el día i al día j para cada (i,j).

   a. Formule el problema como un problema del camino más largo (o como un problema del camino del beneficio máximo). No olvide tener en cuenta la posibilidad de que haya días en los que el apartamento no se alquile. (Lo que sería como alquilárselo a "nadie" durante un día por una renta de 0 dólares.)

   b. Formule el problema como un problema del camino más corto, en el que pueda haber valores negativos para los costes de los arcos.

   c. Convierta el problema del apartado b) en un problema del camino más corto en el que no haya valores negativos para los costes de los arcos. (PISTA: Si se suman 100 dólares a cada arco que contenga el día 1, se incrementa en la misma cantidad el coste total de cada camino, por lo que no tiene efectos a la hora de hallar el camino más corto. Esto es aplicable a cualquier día del periodo. ¿Cómo se puede utilizar este dato para eliminar los arcos de coste negativos?)

5. BH&M, página 407, ejercicio 1

6. BH&M, página 408, ejercicio 1.

7. **Fiver:** Ya hemos visto en clase el juego del fiver, cuya hoja de cálculo se encuentra en los apuntes de clase. Para acceder al juego, vaya a http://www.mazeworks.com/fiver/

   a. ¿Cuál es la respuesta a este juego? Hállela resolviendo el programa entero. Una solución consiste en una matriz 5 x 5 que contiene un 1 en cada uno de los elementos sobre los que debe hacer clic.
   b. Describa el problema consistente en hacer clic sobre un subconjunto de cuadros de modo que sólo cambie el color del cuadro central, quedando invariables todos los demás. ¿En qué consiste el programa entero?
   c. Supongamos que existe una solución factible para el apartado a). Demuestre que debe existir también una solución factible que cambie el color de todos los cuadros excepto el del cuadro central.

d. Utilice la hoja de cálculo Excel para determinar si existe una solución fiable al apartado b). ¿Existe?