Tarea en casa 7

15.053 Introducción a la optimización
Para entregar al inicio de la clase del jueves 18 de abril de 2002.

1. BH&M. Resuelva el siguiente PE utilizando el método *branch & bound*.

Maximizar z = $x_1 + 5\ x_2$
s.a. $-4\ x_1 + 3\ x_2 \leq 6$
$3\ x_1 + 2\ x_2 \leq 18$
$x_1, x_2 \leq 0$ y enteros.

Dibuje el árbol *branch & bound*. En el dibujo, por cada nodo que se considere, escriba la solución PL óptima correspondiente y el valor objetivo óptimo del subárbol. Indique claramente el criterio de ramificación en cada subárbol.

2. En el problema de empaquetamiento de conjuntos para el problema de la estación de bomberos (clase 16; página 4), cada restricción tenía dos variables con coeficientes no nulos. Por ejemplo, tenemos restricciones $x_1 + x_2 \leq 1$; $x_1 + x_4 \leq 1$; $x_1 + x_5 \leq 1$.

a. Dé una solución a la relajación PL que tenga valor objetivo 8 (que es la mitad del número de ciudades). PISTA: cada variable es fraccional. Asumamos que n indica el número de distritos. En general, ¿habrá siempre una solución para la relajación PL del problema de empaquetado de conjuntos (formulado con dos variables por restricción), con valor objetivo n/2?

b. Observe que las ciudades 1, 2 y 5 son todas adyacentes. Esto implica que $x_1 + x_2 + x_5 \leq 1$ en cualquier solución entera factible. A esta desigualdad la denominamos *desigualdad triangular.* Determine una colección de 5 desigualdades triangulares que contengan 15 variables diferentes. (Se dará crédito parcial por hallar 4 desigualdades triangulares que contengan 12 variables diferentes).

c. Si añade todas las desigualdades de su solución del apartado b a la fórmula original, ¿cuál es una cota superior en el valor de solución óptima para el valor de empaquetamiento de conjuntos de la PL? (PISTA: si hay tres variables en un triángulo, entonces al menos una puede contribuir al valor objetivo óptimo).

d. Hallar (con Excel o mediante inspección) 6 variables independientes, esto es, un conjunto de 6 de los que ninguno de ellos comparta frontera. (11 y 15 no comparten frontera, tampoco 12 y 14).

Nota: este ejercicio muestra que la relajación PL del problema de empaquetamiento de conjuntos es bastante débil; es decir, da un límite superior sobre el valor objetivo óptimo que no está próximo al valor objetivo correcto. Añadiendo desigualdades triangulares y muchas otras, la relajación PL da un límite más ajustado. En este caso, añadir sólo cinco desigualdades triangulares fue suficiente para que el valor objetivo óptimo de la programación entera y de la programación lineal fuese el mismo.

3. BH&M, ejercicio 20, página 415. Para la parte b, considere el siguiente ejemplo. Supongamos que n = 201 y cada c_j = 2. La mejor solución al programa entero tiene valor 200 (¿por qué?). Considere cualquier nodo del árbol *branch & bound* en el cual se hayan establecido como máximo las primeras 99 variables. ¿Puede demostrar que la mejor solución para la relajación PL tiene valor 201, y que, de este modo, aún no se puede podar? ¿Supone esto que al menos 2^{99} nodos del árbol *branch & bound* han de evaluarse?

4. Esta es la tabla final obtenida de un programa lineal con el algoritmo simplex.

BV	CV	x1	x2	x3	x4	x5	x6	X7
x2	25 1/16	0	1	1/8	0	5/32	- 1/16	0
x4	139 3/4	1	0	1 1/2	1	- 1/8	1/4	0
x7	3/4	2	0	-5 1/2	0	- 5/8	- 3/4	1
-z	-17985	-10	0	-130	0	-12 1/2	-15	0

a. Suponga que uno tiene el requisito de que todas las variables adopten valores enteros. De esta tabla se pueden obtener tres cortes de Gomory. Escríbalos todos.

b.

i. ¿Es cierto que cada una de estas restricciones eliminará algunas de las soluciones factibles a la relajación de la programación lineal? (PISTA: verifique si la solución óptima PL queda satisfecha por estas restricciones).

ii. ¿Es posible que estas restricciones puedan eliminar algunas soluciones factibles enteras? (PISTA: tenga en cuenta la combinación: x3 =0; x5 =1; x6 = 0).