15.053 Parcial

Martes 12 de marzo de 2001

(sin textos)

1. Responda a todas las preguntas en los cuadernillos de examen.

2. Controle el tiempo. Si un problema (o uno de sus apartados) le lleva mucho tiempo, le convendrá pasar al siguiente.

3. Si considera que alguna pregunta incluye ambigüedades, indique la presunción en la que basa su respuesta, siempre que dicha presunción sea razonable.

4. La suma total de las respuestas es 105 puntos.

1. (60 puntos, 5 por cada apartado).

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Lado derecho	
-1	0	w_1	0	0	w_2	*	3	(0)
0	0	w_3	1	0	*	*	7	(1)
0	0	w_4	0	1	*	*	4	(2)
0	1	w_5	0	0	*	*	w_6	(3)

Este problema es de maximización. En los apartados a) a g), se pide incluir en las respuestas condiciones para w_1, w_2, … w_6. Los valores marcados con "*" no deben tenerse en cuenta, aunque sean también incógnitas. No es preciso especificar el valor de las incógnitas que no sean relevantes, como es el caso de w_3 en el apartado a) del problema.

a. ¿Qué condición deben cumplir los valores de las incógnitas para que la solución básica existente sea factible?

b. ¿Qué condición deben cumplir los valores de las incógnitas para que la solución existente sea factible y degenerada?

c. Suponiendo que la base existente sea factible, ¿cuál será la solución factible? Halle los valores de **todas** las variables de decisión así como el valor objetivo. Si lo cree necesario, puede indicar el valor objetivo y el de la solución en términos de w_6.

d. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de las incógnitas para que la solución existente sea óptima? (Podemos suponer que ésta es factible).

e. Supongamos que la solución es factible, pero no óptima, y que la variable x_2 es el siguiente elemento pivote que entra en la base. ¿Bajo qué condiciones sería la solución no acotada superiormente?

f. Supongamos que la solución no es óptima y que la variable x_2 es el siguiente elemento pivote que entra en la base. ¿Qué condiciones debe cumplir el conjunto de coeficientes para que la variable x_3 sea el elemento pivote que sale de la base?

g. Supongamos que la solución factible básica es óptima y no degenerada. ¿Qué condiciones deben darse para que haya múltiples soluciones óptimas?

En los apartados h, i, j, k, y l se presume que la tabla anterior no es óptima. Tras varios pivotajes, obtenemos la siguiente tabla final, que sí lo es:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Lado derecho**	
-1	0	0	-2	-3	0	0	-18	(0)
0	0	1	1/4	- 1/2	-1	0	1	(1)
0	0	0	1/4	2	0	1	3	(2)
0	1	0	0	1	0	0	7	(3)

h. ¿Cuál es el precio sombra para la restricción (2)?

i. Supongamos que el lado derecho de la restricción (2) se cambia a $4 + \Delta$. ¿Qué cotas superiores e inferiores de Δ mantienen la validez del precio sombra?

Viendo los dos cuadros, ¿se puede concluir que $w_1 = -w_2$? (Obsérvese que la columna 2 guarda una estrecha relación con la columna 5 en la tabla final). Explique su respuesta, ya sea afirmativa o negativa.

k. Si sustituimos w_1 por $w_1 + \Delta$, ¿para qué cotas superiores e inferiores de Δ sigue siendo optima la base final?

l. El coste reducido de x_2 es 0. Partiendo de este dato, formule una ecuación lineal que comprenda w_1, w_3, w_4, y w_5.

2. (20 puntos, 5 por apartado).

Partimos del problema de los empleados de correos visto en los trabajos en casa, con la diferencia de que ahora se trata de minimizar el número total de empleados, y que la demanda correspondiente al lunes es 16.

Horario de los empleados de correos. En la oficina de correos local, el personal trabaja cinco días seguidos y descansa dos, este horario se repite todas las semanas. Así, un trabajador goza de los mismos dos días libres consecutivos cada semana (p. ej., domingo y lunes). La demanda de personal se ilustra en la tabla mostrada. Cada día se deben satisfacer o superar los requisitos de la tabla. Las cifras reflejan el número total de trabajadores que tiene que haber ese día . El objetivo consiste en minimizar el número de empleados.

Día	Lun.	Mar.	Miér.	Jue.	Vie.	Sáb.	Dom.
Demanda	16	13	15	19	14	16	11

Esta tabla muestra algunos de los resultados en Excel. Vemos que el número de empleados que trabajan el turno de lunes (es decir; lunes, martes, miércoles, jueves y viernes) es 1. La solución óptima sería 22 empleados.

Nombre	Valor final	Coste reducido	Coeficiente objetivo	Aumento admisible	Disminución admisible
Turno lun.	1	0	1	1/2	0
Turno mar.	6	0	1	0	0
Turno miér.	0	0	1	1E+30	0
Turno jue.	7	w_1	1	1/2	0
Turno vie.	0	1/3	1	1E+30	1/3
Turno sáb.	3	0	1	0	1
Turno dom.	5	0	1	0	1/3

Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Aumento admisible	Disminución admisible
Demanda lun.	16	1/3	16	9	3
Demanda mar.	15	0	13	2	1E+30
Demanda miér.	15	1/3	15	10 1/2	2
Demanda jue.	19	1/3	19	1 1/2	5
Demanda vie.	14	0	14	4	1
Demanda sáb.	16	w_2	16	1 1/2	6
Demanda dom.	15	0	11	4	1E+30

a. Supongamos que la dirección desea aumentar la demanda de servicio del viernes de 14 a 17. ¿Cuántos empleados extra serán necesarios? (Si considera que no hay suficientes datos en los resultados de Excel, indíquelo).

b. Supongamos que la dirección desea aumentar la demanda de servicio del viernes de 14 a 20. ¿Cuántos empleados extra serán necesarios? (Si considera que no hay suficientes datos en los resultados de Excel, indíquelo).

c. ¿Cuál es el coste reducido del turno de jueves, que aparece como w_1? (Si considera que no hay suficientes datos en los resultados de Excel, indíquelo).

d. Supongamos que se necesita contratar al menos a una persona para el turno de viernes, lo que podríamos expresar con un valor de FS mayor o igual que 1. ¿Cuál sería el número total de empleados, suponiendo que se permiten números fraccionales y que el precio sombra de la restricción $FS \geq 0$ es válido si el lado derecho se incrementa al menos en 1?

Las preguntas 3, 4 y 5 se responden con "Verdadero" o "Falso". En la 4 y en la 5 deberá justificar su respuesta, pero ello no es necesario en la 3. Cada una de ellas vale 5 puntos.

3. Cuando se aplica el algoritmo simplex partiendo de una solución factible básica, puede ocurrir que el lado derecho sea un valor negativo. En tal caso, el problema es no factible.

Para las preguntas 4 y 5, partimos de una programación lineal en dos dimensiones.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Si existe una solución factible al PL, deberá haber también una solución óptima.

5. Si hay exactamente una solución óptima a este PL, deberá producirse en un punto extremo de la región factible.

Preguntas cortas. 5 puntos cada una.

6. ¿Qué propiedades tiene el algoritmo simplex cuando no hay bases degeneradas?

7. Un programa lineal se define mediante un enfoque de fase 1, teniendo el programa lineal una solución factible. ¿Cuál será el valor objetivo óptimo del programa lineal de fase 1? (Si considera que no hay suficientes datos para dar una respuesta, indíquelo).