15.053 Parcial

Miércoles, 14 de noviembre de 2001

No se permiten textos, únicamente una hoja de papel con anotaciones por las dos caras

1. Responda a todas las preguntas en los cuadernillos de examen.

2. Controle el tiempo. Si un problema (o uno de sus apartados) le lleva mucho tiempo, le convendrá pasar al siguiente.

3. El único problema que exige una solución es el número 2; debe resolverse sin calculadora. Los problemas 1, 3 y 4 son ejercicios de creación de modelos.

1. La tabla 1 representa una matriz de resultados para un problema de teoría de juegos de suma cero entre dos personas. Si el jugador de las filas elige la fila i y el de las columnas la columna j, la cifra de la fila i y de la columna j será el resultado correspondiente al **jugador de las columnas** (es decir, el caso contrario al visto en clase). Por ejemplo, si el jugador de las filas elige la fila 1 y el de las columnas la columna 2, el primero perderá 3 dólares, que es la cantidad que ganará su contrincante.

Tabla 1

0	3	2	-2
-3	-1	-2	5
2	-2	-1	-2

a. (15 puntos) Supongamos que el jugador de las filas plantea una estrategia de jugadas al azar. ¿Cuál sería su mejor jugada, expresada en forma de programa lineal de maximización de su ganancia? (Si lo prefiere, puede resolver primero el ejercicio como si se tratara de un problema de max/min o min/max, pero no olvide formularlo después como un programa lineal orientado a la maximización).

b. (10 puntos) ¿Cuál es el dual del programa lineal del apartado anterior?

2. Hemos visto en clase un problema de flujo de coste mínimo. En este ejercicio se plantea uno de flujo de red de coste máximo, que es prácticamente el mismo, salvo en que lo que hay que maximizar es el coste total del flujo. (PISTA: la principal diferencia entre este problema y el visto en clase radica en las condiciones de optimalidad, que afectan sólo al apartado d).

a. (6 puntos) En la figura 1, el valor de la oferta aparece indicado por el número que se halla junto a cada arco. Determine el flujo de cada arco.

b. (6 puntos) Supongamos que todos los flujos están sujetos a la restricción de ser no negativos, y que los flujos de arco carecen de límite superior. Asimismo, el arco (4,7) entra en la base en la siguiente iteración. ¿Qué arco deja la base? Indique todos los pasos.

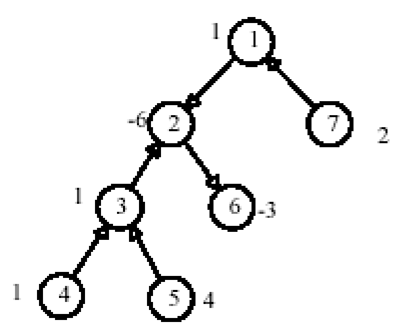

Figura 1. Diagrama de los apartados 2a y 2b.

c. (6 puntos) La figura 2 muestra los costes en los arcos del árbol de expansión. ¿Cuáles son los multiplicadores simplex (potenciales de nodo) para el árbol de expansión? Como siempre, el potencial de nodo fijado para el nodo 1 es 0.

d. (7 puntos) La tabla 2 contiene datos de cuatro arcos que no se hallan en el árbol. Halle el coste reducido de cada uno de ellos, indicando si el arco cumple la condición de optimalidad (y no es, por tanto, susceptible de entrar a la base) o si la incumple (y puede entrar en ella). Considere los dos arcos con parámetros (4,7) como distintos (o como supuestos distintos de un mismo arco, si lo prefiere).

Tabla 2

arco sin árbol	coste	en cota superior o inferior
(4,7)	8	en cota inferior
(4,7)	6	en cota superior
(5,1)	-3	en cota inferior
(1,5)	-2	en cota superior

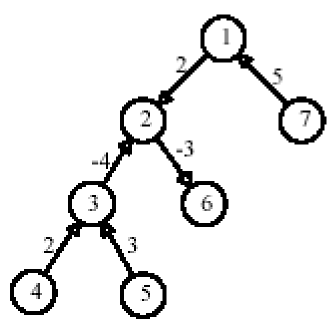

Figura 2. Árbol de expansión y costes en los arcos. Apartados 2c y 2d.

3. (20 puntos) Pedro y Kavitha juegan una partida de rummy en la que el ganador anota 31, 33 ó 37 puntos en cada mano, dependiendo de las cartas que le queden a su rival. Después de 20 rondas, Kavitha ha obtenido 310 puntos. ¿Qué número mínimo de manos habría tenido que ganar para obtener exactamente esa puntuación? Expréselo como un problema del camino más corto (sin resolverlo). Este problema comprende gran cantidad de nodos (entre 300 y 320). Explique qué nodos y qué arcos se hallan en la red, así como los costes de estos últimos. Asimismo, explique brevemente por qué el problema del camino más corto sirve para expresar el problema de Pedro y Kavitha. (Para ello deberá indicar la correspondencia exacta entre los caminos del grafo y las soluciones a este problema.)

4. Joseph ha comprado una balanza con 20 pesas. Las dos primeras son de 1 y 4 libras, y los pesos de las 18 restantes son w_3, w_4, w_5, …, w_{20}. Para pesar el objeto A, Joseph coloca éste en un platillo de la balanza y las pesas en el otro. Las dos primeras pesas le sirven para pesar objetos de 1, 4 ó 5 libras. En los apartados a) y b) suponemos que las pesas se pueden colocar solamente en un lado de la balanza.

a. (7 puntos) Exprese, en forma de programa entero, el problema consistente en determinar si existe una combinación de pesas que dé 100 libras como peso total. En caso de haber más de una solución, elija aquella en la que se emplee el menor número de pesas.

b. (15 puntos) Expese, en forma de programa entero, el problema del apartado anterior con las tres siguientes restricciones:

i. Se puede elegir la pesa 3 o la 5, pero no las dos.
ii. Si se elige la pesa 6, se debe elegir también la 9.
iii. Si se elige la pesa 7, sólo se puede elegir un máximo de 3 pesas entre la 11 y la 20.

c. (8 puntos) Ahora suponemos que también se pueden pesar objetos colocando pesas en ambos lados de la balanza. Así, por ejemplo, para comprobar si el objeto A pesa 3 libras, podemos colocar éste junto a una pesa de 1 libra en un platillo de la balanza y colocar la pesa de 4 libras en el otro. Exprese, en forma de programa entero, el problema consistente en determinar si es posible pesar un objeto A de 100 libras. Exprese asimismo el problema consistente en hallar la solución factible en la que se emplee el máximo número de pesas.