15.053 Segundo parcial

Martes, 23 de abril de 2003

Se permite traer una hoja de papel con anotaciones por una cara

1. Responda a todas las preguntas en los cuadernillos de examen.
2. Controle el tiempo. Si un problema (o uno de sus apartados) le lleva mucho tiempo, le convendrá pasar al siguiente.
3. Si considera que alguna pregunta incluye ambigüedades, indique la presunción en la que basa su respuesta, siempre que su presunción sea razonable).
4. La suma total de las respuestas es 100 puntos.

1a. (10 puntos). Exprese el dual del siguiente programa lineal:

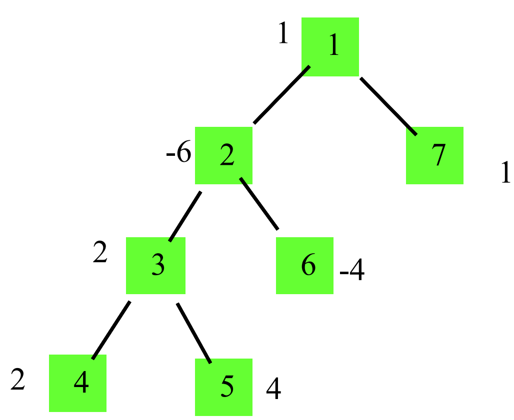
$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar } z = & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \quad = -4 \\
& x_1 \qquad - x_3 + x_4 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_2 \text{ y } x_4 \text{ no tienen restricciones de signo.}
\end{array}
$$

b. (5 puntos). La solución $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, y $x_4 = 1$ es factible para el PL primal. ¿Podríamos concluir que también existe una solución factible para el dual?

c. (5 puntos). Suponiendo que la PL dual sea factible, fije una cota superior o inferior para su valor objetivo óptimo. Indique cuál es la cota y si se trata de una cota superior o inferior. Explique brevemente por qué es una cota.

2a. (10 puntos). En el siguiente diagrama, el número que aparece junto a cada arco representa la oferta. Determine el flujo correspondiente a cada arco.

b. (5 puntos) Supongamos que todos los flujos tienen la restricción de ser no negativos, y que los flujos de arco carecen de cotas superiores, así como que en la siguiente iteración el arco (7,5) entra en la base. ¿Qué arco deja la base? Indique todos los pasos.



3. (10 puntos). Un médico necesita programar las visitas de sus pacientes durante la próxima semana. El tiempo que va a dedicar a cada paciente es media hora, y su horario de consulta va de 9 a 12 y de 1 a 5, por lo que dispone de 14 segmentos de tiempo cada día. Durante la semana, debe programar la visita de 68 pacientes, cada uno de los cuales le ha hecho saber sus cinco preferencias. Formule como un problema de flujo de red el problema consistente en programar las 68 consultas a lo largo de la semana de modo que cada paciente obtenga una de sus cinco preferencias. De entre todos los programas factibles, maximice el número de pacientes que obtendrían su primera o segunda preferencia. (Esta formulación deberá incluir restricciones de integralidad, puesto que no es posible fraccionar a los pacientes para asignarlos a segmentos de tiempo).
Para obtener la puntuación máxima, deberá expresar la fórmula mediante notación sumatoria. Para obtener una puntuación parcial, basta con presentar un esquema en forma de diagrama del problema del flujo de red.

b. (5 puntos). Si se resuelve el problema anterior como un PL (relajando las restricciones de integralidad), ¿se obtendrán soluciones enteras? Explique brevemente el porqué.

4. Eastinghouse fabrica mensualmente 12.000 condensadores para su posterior envío a clientes. Los condensadores se fabrican en cuatro plantas distintas. La siguiente tabla muestra la capacidad de producción, el coste fijo mensual de explotación y el coste variable correspondiente a la fabricación de un condensador en cada una de las plantas. Este último sólo se tiene en cuenta cuando en esa planta se fabrican condensadores.

a. (15 puntos). Formule un modelo de programación entrera cuya solución permita a Eastinghouse minimizar sus costes mensuales necesarios para satisfacer las necesidades de sus clientes. No es preciso que resuelva el problema. (PISTA: y_j = 1 cuando la planta j está funcionando y 0 cuando no, para j = 1, 2, 3, 4.)

	Coste fijo	Coste variable	Capacidad producción
Planta 1	\$80,000	\$20	5000
Planta 2	\$70,000	\$25	8000
Planta 3	\$30,000	\$30	6000
Planta 4	\$20,000	\$35	4000

b. (5 puntos). Una norma interna de Eastinghouse establece que puede estar funcionando la planta 1 o la 2, pero no ambas a la vez. Exprese esta restricción por medio de variables enteras.

(subir párrafo siguiente)

5. (10 puntos). Observe el siguiente problema de análisis de inversiones:

maximizar $4x_1 + 7\,x_2 + 22x_3 + 28x_4 + 31x_5 + 34x_6$

sujeto a: $5x_1 + 8\,x_2 + 23\,x_3 + 29\,x_4 + 32\,x_5 + 35\,x_6 \leq 80$

$0 \leq x_j \leq 1$ para $j = 1$ a 6

x_j es entero para $j = 1$ a 6

Supongamos que el resolutor (solver) de PL nos da la siguiente solución:

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4/23,\ x_4 = 9/29,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.$

Exprese una restricción válida (corte) que elimine esta solución fraccionaria sin eliminar las soluciones enteras. Una vez añadido el corte, exprese el programa entero. (En caso de que pueda haber varios cortes, exprese aquel que sea "mejor", es decir, el que elimine el mayor número de soluciones fraccionarias.)

6. (10 puntos) En cierta iteración del algoritmo de Dijstra para el problema del camino más corto, el nodo 10 está permanentemente etiquetado, y la etiqueta de distancia es 20. De las dos tablas siguientes, una muestra las distancias de los nodos d( ) mientras el nodo 10 se halla permanentemente etiquetado, y la otra, las longitudes de los arcos provenientes de dicho nodo.

arco	longitud
(10, 5)	7
(10, 7)	3
(10, 11)	12
(10, 14)	6
(10, 15)	9

nodo	d( )
5	19
7	25
10	20
11	30
14	30
15	16

a. ¿Qué nodos se hallaban etiquetados permanentemente antes del nodo 10? Si considera que no existen suficientes datos, indíquelo.

b. ¿Cuáles serán las etiquetas de distancia después de que se hayan explorado los arcos provenientes del nodo 10?

7. (10 puntos) Supongamos que, al resolver un programa entero, nos encontramos con que el nodo i es un nodo del árbol de ramificación y acotamiento. Indique las condiciones bajo las que dicho nodo podría sondearse.