15.053 Jueves, 14 de marzo

- Introducción a los flujos de redes
- Entregas: material de clase

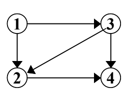
Modelos de redes

- Modelos de programación lineal que presentan una estructura muy especial.
- Esta estructura permite reducir en gran medida la complejidad del tratamiento informático.
- Primera aplicación ampliamente extendida de la PL a problemas de logística de empresa.
- Permite un gran número de aplicaciones prácticas de diversos tipos.

Notación y terminología

Nota: la terminología de redes no está estandarizada (ni lo estará nunca). Un mismo concepto se puede describir de muy diversas maneras.

Esta figura se llama:
- RED
- grafo dirigido
- digrafo
- grafo



Entregas (Ahuja, Magnanti, Orlin)

Red G = (N,A)

Conjunto de nodos N = {1,2,3,4}

Conj. arcos {(1,2),(1,3),(3,2),(3,4),(2,4)}

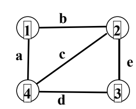
Ya visto:

Grafo G = (V,E)

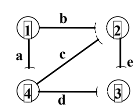
Conj. vértices V = {1,2,3,4}

Conjunto de ejes:
A={1-2,1-3,3-2,3-4,2-4}

Redes dirigidas y no dirigidas



Grafo no dirigido



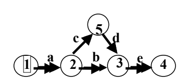
Grafo dirigido

- **Las redes se emplean para el transporte de:**
  - bienes **materiales (productos, líquidos)**
  - **comunicaciones**
  - **electricidad, etc.**
- **El campo de la optimización de redes comprende también los problemas de optimización**

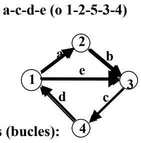
Vista general de algunas aplicaciones prácticas de la optimización de redes

Aplicaciones	Analogía física de nodos	Analogía física de arcos	Flujo
Sistemas de comunicación	telefonía, informática transmisiones, satélites	Cables, fibra óptica, radioenlaces por microondas	Transmisión de mensajes de voz, datos, vídeos
Sist. hidráulicos	Bombeos, lagos, embalses	Canalizaciones	Agua, gas, fluidos, combustibles
Circuitos integrados de computación	Puertas, registros, procesadores	Cableados	Corriente eléctrica
Sist. mecánicos	Conexiones	Palancas, bielas, muelles	Calor, energía
Sistemas de transporte	Cruces, aeropuertos, estaciones	Carreteras, rutas aéreas, vías férreas	Pasajeros, cargas, vehículos, operadores

Ejemplos de términos



Dos caminos a-b-e (o 1-2-3-4) y a-c-d-e (o 1-2-5-3-4)



Ciclos (bucles):
a-b-c-d (o 1-2-3-4-1)
b-a-d-c (o 3-2-1-4-3)
e-b-a (o 1-3-2-1)
c-d-e (o 3-4-1-3)

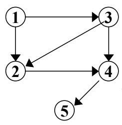
Camino: **ejemplo: 5, 2, 3, 4.**
(o 5, c, 2, b, 3, e, 4)
No se tienen en cuenta las direcciones

***Camino dirigido*. Ejemplo: 1, 2, 3, 4**
(o 1, a, 2, b, 3, e)
Es importante tener en cuenta las direcciones

Ciclo o circuito (o bucle)
1, 2, 3, 1. (o 1, a, 2, b, 3, e)
No se tienen en cuenta las direcciones

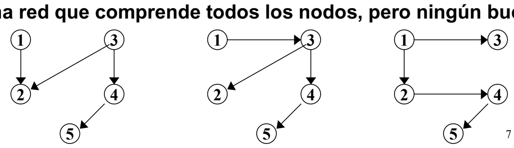
Ciclo dirigido: (1, 2, 3, 4, 1) o
1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 1
Es importante tener en cuenta las direcciones

Otras definiciones



Se dice que una red está *conectada* cuando es posible llegar a cualquier nodo desde otro nodo siguiendo una secuencia de arcos en la que no importa la dirección.

Un *árbol de expansión* es un subconjunto conectado de una red que comprende todos los nodos, pero ningún bucle

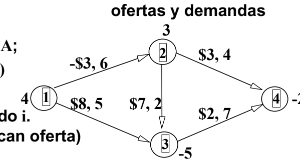


Problema del flujo de coste mínimo

Red G = (N, A)

- Conj. nodos N, conj. arcos A;
- Capacidades u_{ij} en arco (i,j)
- Coste c_{ij} en arco (i,j)
- Oferta/demanda b_i para nodo i. (Los valores positivos indican oferta)

Red con costes, capacidades, ofertas y demandas



Minimizar el coste del envío de flujo
s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante= b_i
Flujo en arco (i,j) ≤ u_{ij}

Problema del flujo de coste mínimo

Llamemos x_{ij} al flujo en el arco (i,j).

Minimizar el coste del envío de flujo
s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante = b_i
$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$

Minimizar $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

s.a. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i$ en todo i

$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$ para todo i-j

Formulación del ejemplo

Min $-3x_{12} + 8x_{13} + 7x_{23} + 3x_{24} + 2x_{34}$

s.a $x_{12} + x_{13} = 4$

$x_{23} + x_{24} - x_{12} = 3$

$x_{34} - x_{13} - x_{23} = -5$

$- x_{24} - x_{34} = -2$

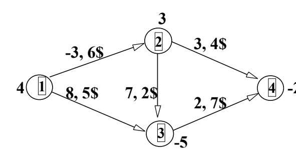
$0 \le x_{12} \le 6$

$0 \le x_{13} \le 5$

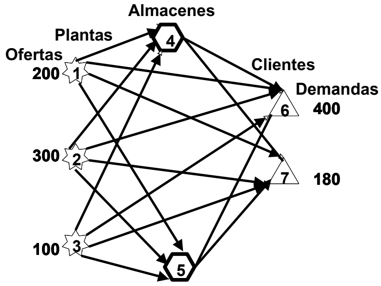
$0 \le x_{23} \le 2$

$0 \le x_{24} \le 4$

$0 \le x_{34} \le 7$



Una aplicación práctica del problema del flujo de coste mínimo



Envío desde los proveedores a los clientes, posiblemente vía almacenes, a un coste mínimo para cubrir la demanda.

Datos útiles sobre el problema del flujo de coste mínimo

- **Supongamos que la matriz de restricción, A, tiene las siguientes propiedades (sin contar los límites inferiores de la variable, como $x \le 7$):**
  - (1) todas las entradas de A son 0, 1 o -1
  - (2) en cualquier columna hay como máximo un 1 y como mínimo un -1.
- **Por tanto, se trata de un problema de flujo de coste mínimo.**

Datos útiles (continuación)

Teorema: si aplicamos el algoritmo simplex al problema del flujo de coste mínimo con capacidades de valor entero y lado derecho, en cada iteración del algoritmo, cada coeficiente de la tabla (excepto los de costes y los del lado derecho) será 0, -1 ó 1.

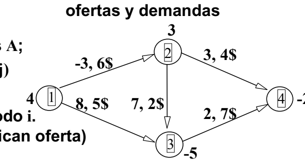
Corolario: la solución óptima al PL es un valor entero.

Problema del flujo de coste mínimo

Red G = (N, A)

- Conj. nodos N, conj. arcos A;
- Capacidades u_{ij} en arco (i,j)
- Coste c_{ij} en arco (i,j)
- Oferta/demanda b_i para nodo i.
  (Los valores positivos indican oferta)

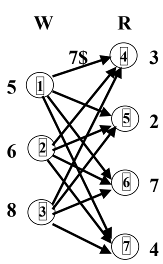
Red con costes, capacidades, ofertas y demandas



Minimizar el coste del envío de flujo
s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante = b_i
Flujo en arco (i,j) ≤ u_{ij}

Problema del transporte

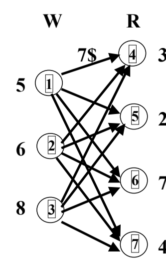
Supongamos que queremos realizar envíos desde almacenes a vendedores minoristas



En este ejemplo tenemos:
3 almacenes
4 minoristas
a_i es la oferta en el almacén i.
b_j es la demanda en el minorista j.
c_{ij} es el coste del envío de i a j.
No hay capacidades en los arcos.

Llamaremos x_{ij} a la cantidad de flujo enviado del almacén i al minorista j.
¿Cómo formulamos un PL?

El problema del transporte es un problema de flujo de coste mínimo



Minimizar el coste del envío de flujo
s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante = b_i
$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$

El flujo saliente se produce en los nodos de oferta
El flujo entrante se produce en los nodos de demanda
Las capacidades son infinitas $_{ij} = \infty$

El problema del transporte

En general, la formulación del PL viene dada como:

Minimizar $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, \forall ij$$

Todos los arcos van de un nodo en S a un nodo en D, y sin capacidades

S: nodos de oferta

D: nodos de demanda

Datos útiles sobre el problema del transporte

Supongamos que
(1) la matriz de restricción puede dividirse entre $A_1x = b_1$ y $A_2x = b_2$.
(2) todas las entradas de A_1 y A_2 son 0 ó 1
(3) hay como máximo un 1 en cada columna de A_1 o A_2

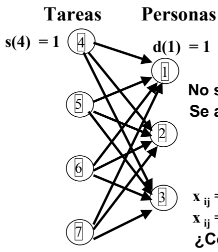
Por tanto, se trata de un problema de transporte.

Teorema: si aplicamos el algoritmo simplex al problema del transporte, en cada iteración del algoritmo cada coeficiente de la tabla (excepto los de costes y los del lado derecho) será 0, -1 ó 1. Tanto los costes como el lado derecho tienen valores enteros.

Corolario: la solución óptima al PL es un valor entero.

Problema de las asignaciones

Supongamos que queremos asignar tareas a personas



En este ejemplo tenemos:
4 tareas
3 personas
No se pueden asignar dos tareas a una persona
Se asigna una tarea a cada persona
c_{ij} es el "coste" de asignar la tarea i a la persona j

$x_{ij} = 1$ si se asigna la tarea i a la persona j
$x_{ij} = 0$ en caso contrario
¿Cómo formulamos un PL?

Problema de las asignaciones

En general, la formulación del PL viene dada como:

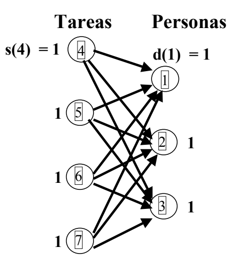
Minimizar $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1,\ldots,n \quad \boxed{\text{Cada oferta es 1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1,\ldots,n \quad \boxed{\text{Cada demanda es 1}}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1, \ \forall ij$$

Problema de las asignaciones (continuación)

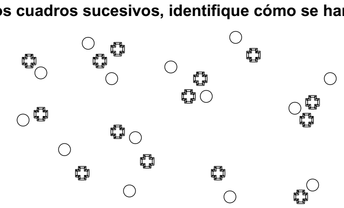


Este problema es un supuesto especial del problema del transporte.

El algoritmo simplex permite resolver la relajación del PL, dando respuestas enteras, es decir, permite resolver el problema de las asignaciones.

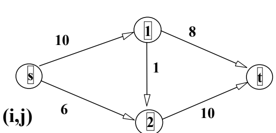
Aplicación práctica del problema de las asignaciones

Tenemos una serie de blancos móviles en el espacio, y podemos identificar cada uno de ellos como un píxel en una pantalla de radar. Dados dos cuadros sucesivos, identifique cómo se han movido los blancos



Problema del flujo máximo

Red G = (N, A).
- **Origen** s **y fuente** t
- **Capacitdades** u_{ij} **en arco (i,j)**
- **Variable: flujo** x_{ij} **en arco (i,j)**



Grafo con capacidades

Maximizar el flujo dejando s
s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante i = 0 para i ≠ s, t
$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$

Problema del flujo máximo

En general, la formulación del PL viene dada como:

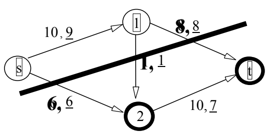
Maximizar v

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} v, & i = s \\ -v, & i = t \quad \forall i = 1,\ldots,n \\ 0, & \textit{de lo contrario} \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall ij$$

Vemos que la formulación no está expresada como un supuesto especial de flujo de coste mínimo. ¿Podríamos formularla de este modo?

Más sobre el problema del flujo máximo



Grafo con capacidades
y flujos (subrayados)

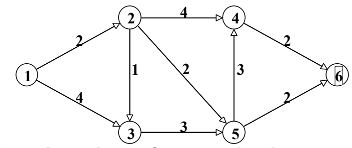
¿Es óptimo el flujo actual?

El corte s-t separa los nodos en dos partes: S y T (s en la S y t en la T).

La capacidad del corte es la suma de las capacidades desde S hasta T.

El flujo máximo de s a t será como máximo la capacidad del corte s-t.

Problema del camino más corto



¿Cuál es el camino más corto desde un nodo de origen (normalmente indicado como s) a un nodo de destino (normalmente indicado como t)? ¿Cuál sería el camino más corto desde el nodo 1 al nodo 6?

Presunciones parciales:

1. **Existe un camino desde el nodo s a todos los demás**
2. **Todas las longitudes de arcos son no negativas**

Aplicaciones prácticas

- **¿Qué camino es el más corto para un conductor que va desde el 77 de Massachusetts Avenue hasta el ayuntamiento de Boston ?**
- **¿Qué camino desde el edificio 7 al edificio E40 minimiza el tiempo de desplazamiento?**
- **¿Cuál de los caminos que comunican i con j es el más rápido (teniendo en cuenta la congestión que haya en los nodos)?**

Formulación como un programa lineal

En general, la formulación del PL viene dada como:

Minimizar $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{i = s} \\ -1, & \boldsymbol{i = t} \quad \forall \boldsymbol{i} = 1,\ldots,\boldsymbol{n} \\ 0, & \textit{de lo contrario} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0, \ \forall \boldsymbol{ij}$$

Problema del camino más corto

- **Dato: el problema del camino más corto es un caso especial del problema del flujo de coste mínimo**
- **Muchas más aplicaciones de interés (próximamente)**
- **Algoritmo muy rápido (próximamente)**
- **Conexión a la programación dinámica (en varias clases a partir de ahora)**

Conclusiones

- **Ventajas que ofrecen el problema del transporte y el del flujo de coste mínimo**
  - **Soluciones enteras**
  - **Métodos de solución muy rápidos**
  - **Método de creación de modelos muy común**
- **Temas tratados en la clase de hoy:**
  - **Problema del flujo de coste mínimo**
  - **Problema del transporte**
  - **Problema de las asignaciones**
  - **Problema del flujo máximo**
  - **Problema del camino más corto**