15.053 Martes, 19 de marzo

- Método simplex para redes aplicado a la solución del problema del flujo de coste mínimo

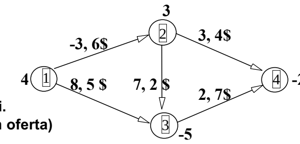
Entregas: material de clase

Nota: hay mucho que decir acerca del algoritmo simplex para redes, aunque sea muy parecido al algoritmo simplex.

Problema del flujo de coste mínimo

- Grafo dirigido G = (N, A).
  - Conj. de nodos;
  - Capacidades u_{ij} en arco (i,j)
  - Cota inferior de 0 en arco (i,j)
  - Coste c_{ij} en arco (i,j)
  - Oferta/demanda b_i para nodo i.
    (Los valores positivos indican oferta)

Red con capacidades, costes, ofertas y demandas



Minimizar el coste del envío de flujo

s.a. Flujo saliente de i - flujo entrante en i = b_i

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

Formulación

Consideraremos que la formulación del PL viene dada como:

Minimizar $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

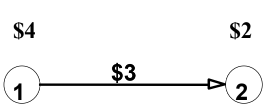
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i, \forall i = 1,\ldots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

Pricing Out

	x_{ij}		
	c_{ij}	$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$	precio
	0		
fila i	1	b_i oferta para i	y_i
	0		
fila j	-1	b_j oferta para j	y_j

Llamaremos a y_i *potencial de nodo* para el nodo i



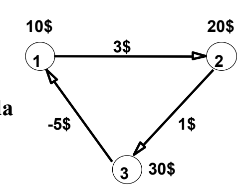
$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$

$\bar{c}_{12} = 3\$ - 4\$ + 2\$ = 1\$$

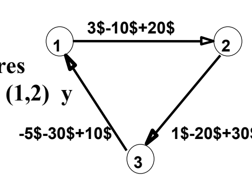
El pricing out funciona como una prima a la exportación para el flujo que sale de un nodo y como una tasa de importación para cada unidad de flujo de entrada.

Los costes reducidos son un elemento clave del algoritmo simplex para redes.

Costes reducidos de ciclos



- $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$ para cada arco (i,j).
- El coste reducido de un ciclo es el coste de ese ciclo.
- El nodo 2 añade 20 dólares a una unidad de flujo en (1,2) y resta otros 20 de una unidad de flujo en (2,3)



Dato importante: la optimización con respecto a los costes c da la misma solución óptima que la realizada con respecto a los costes reducidos c

20$

2 b(2) = 8

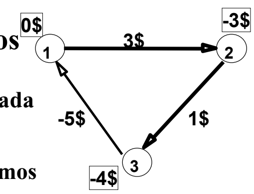
Veamos el impacto del potencial para el nodo 2:

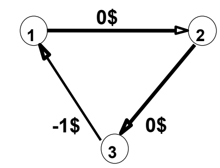
- Cada unidad de coste de flujo de salida disminuye en 20 dólares.
- Cada unidad de coste de flujo de entrada aumenta en 20 dólares.
- Hay 8 salidas más que llegadas.

Impacto neto sobre el coste: 8 x 20$ = 160$, sin incluir el flujo

Como sacar partido de los costes reducidos

- $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$ para cada arco (i,j).
- Supongamos que queremos que los costes reducidos de (1,2) y de (2,3) sean 0.





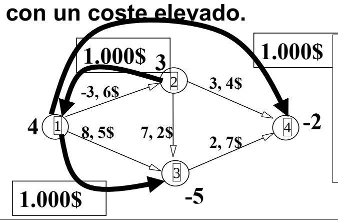
Nota: después, el coste del ciclo será el coste reducido de (3,1).

Algunas suposiciones

1. La red es dirigida.
2. $\sum_{i=1 \text{ a } n} b(i) = 0$. (En caso contrario, no habría una solución factible).
3. Existe una solución factible (véase siguiente diapositiva).

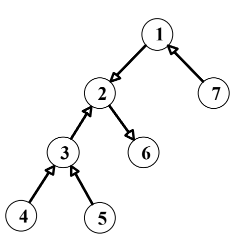
Una solución factible inicial artificial

- Añadimos un arco (1, j) para cada j con b(j) < 0 y con un coste elevado.
- Añadimos un arco (j, 1) para cada j con b(j) > 0 y con un coste elevado.



Enviamos 2 unidades de flujo desde 1 a 4, 5 unidades de flujo desde 1 a 3 y 3 unidades de flujo desde 2 a 1.

Las variables básicas son flujos de arco, y los arcos forman un árbol de expansión



Tenemos un nodo llamado ***nodo raíz***.

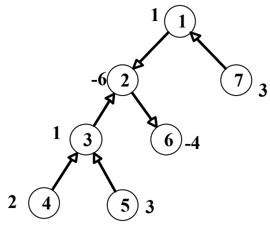
Hay un único camino (no dirigido) que va desde el nodo raíz a cualquier otro nodo (y viceversa).

¿Qué camino va del nodo 1 al nodo 5?

Repaso del algoritmo simplex

- Paso 1. Partimos de una solución factible básica.
- En nuestro algoritmo, partiremos de un árbol de expansión para después determinar su flujo.

Cálculo del flujo del árbol de expansión

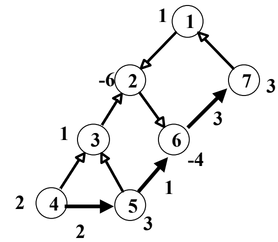


Árbol con ofertas y demandas. (Suponemos que el flujo de los otros arcos es 0).

¿Cuál es el flujo en el arco (4,3)? PISTA: la oferta para el nodo 4 es 2.

Véase la animación.

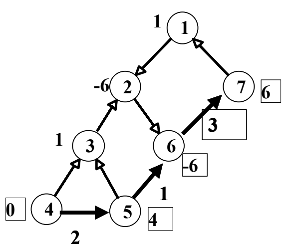
¿Qué ocurriría si los flujos en los arcos sin árboles no fueran 0?



Supongamos que el flujo de los arcos sin árboles fuera distinto de 0.

¿De qué manera afectaría a los cálculos?

¿Qué ocurriría si los flujos en los arcos sin árboles no fueran 0?



Ajustamos las ofertas/demandas para incluir los arcos que tengan flujo en la cota superior.

El cálculo fluye igual que en el método anterior; p.ej., ¿cuál es el flujo en (4,3)?

El flujo en (4,3) es 0.

Cotas superiores

- **En el algoritmo simplex, las variables no básicas tienen un flujo igual a 0.**
- **En el algoritmo simplex con cotas superiores, estas variables pueden tener un flujo igual a 0.**
  - **O éste puede hallarse en la cota superior.**
  - **Los flujos no básicos pueden producir, en su cota superior, cambios en la oferta de red de un nodo.**

Algoritmo simplex

- **Paso 1A: partimos de una solución factible básica.**
- **Paso 1B: calculamos los multiplicadores simplex de modo que todos los costes reducidos de las variables básicas sean 0. (Es decir, nos aseguramos de que los coeficientes de coste estén en forma canónica).**

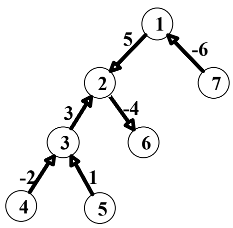
Cómo hallar los multiplicadores

- **En primer lugar, debemos determinar los multiplicadores y_i para $i=1,\ldots,n$ aplicando**

$$c_{ij} - y_i + y_j = 0$$

a todas las variables básicas.

Cálculo de los multiplicadores simplex para un árbol de expansión



Tenemos un árbol de expansión con costes en los arcos. ¿Cómo elegiremos los potenciales de nodo de modo que los costes reducidos de cada arco sean igual a 0?

Véase la animación

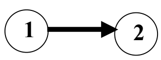
Recuerde: el coste reducido de (i,j) es $c_{ij} - \pi_i + \pi_j$
Supongamos que $\pi_1 = 0$.

Condiciones de optimalidad

- **Una vez hallados los multiplicadores, comprobaremos las siguientes condiciones de optimalidad para cada arco no básico.**

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x_{ij} = 0 \\ = 0 & \text{si } 0 < x_{ij} < u_{ij} \\ \leq 0 & \text{si } x_{ij} = u_{ij} \end{cases}$$

Análisis de un arco individual



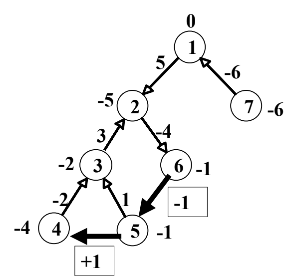
Supongamos que $\bar{c}_{12} < 0$.

Y que deseamos que el flujo tenga el máximo valor posible.
Si $x_{12} < u_{12}$, el flujo en (1,2) no es óptimo.
Queremos incrementar ese flujo.
Si $x_{12} = u_{12}$, sí que es óptimo.

Supongamos que $\bar{c}_{12} > 0$.

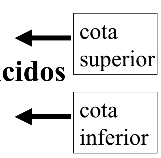
Y que deseamos que el flujo tenga el mínimo valor posible.
Si $x_{12} > 0$, el flujo en (1,2) no es óptimo.
Queremos disminuir ese flujo.
Si $x_{12} = 0$, sí que es óptimo.

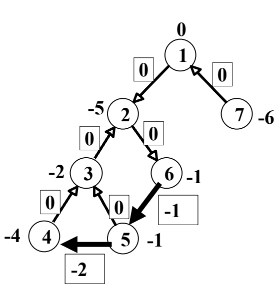
Comprobación de costes reducidos



Primero, fijamos los potenciales del nodo para que todos los arcos tengan un coste reducido igual a 0

Comprobación de costes reducidos





(6,5) se halla en su cota inferior; no cumple las condiciones y podría entrar a la base.

(5,4) se halla en su cota superior; cumple las condiciones de optimalidad.

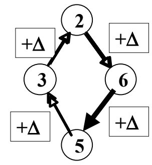
Algoritmo simplex

- **Paso 1A: partimos de una solución factible básica.**
- **Paso 1B: calculamos los multiplicadores simplex de modo que todos los costes reducidos de las variables básicas sean 0.**
- **Paso 2: elegimos una variable de entrada que no cumpla la condición de optimalidad.**
  En el ejemplo anterior, elegiríamos (6,5) en vez de (5,4)

¿Qué arco debería entrar a la base?

- **En el método simplex para redes con variables acotadas, las variables no básicas se hallan en sus cotas inferiores o superiores. Se puede llegar a una solución mejorada si:**
  - **1. Incrementamos una variable que tenga un coste reducido negativo y que esté en su cota inferior.**
  - **2. Disminuimos una variable que tenga un coste reducido positivo y que esté en su cota superior.**

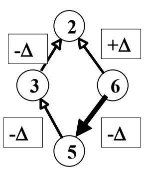
Si el arco entrante se halla en su cota inferior, incrementaremos el flujo en Δ



Añadiendo un arco no básico al árbol de expansión se crea un ciclo básico.

Ajustamos los flujos del ciclo básico de modo que se cumplan las restricciones de oferta/demanda.

Si el arco entrante se halla en su cota superior, disminuiremos su flujo en Δ.



Supongamos que (6,5) estaba en su cota superior. Ajustamos los flujos del ciclo básico de modo que se cumplan las restricciones de oferta/demanda

Al incrementar Δ , alguno de los arcos alcanzará su cota inferior o superior. (Salvo que la solución óptima sea no acotada). Ese arco dejará la base.

Algoritmo simplex para redes

comienzo

determinar una estructura de árbol factible inicial (T, L, U)
llamaremos x al flujo inicial
y indica los potenciales de nodos iniciales
si alguno de los arcos no cumple las conds. de optimalidad:
(comienzo)
seleccionamos un arco entrante (k,l) que no cumpla las condiciones
añadimos ese arco al árbol y trasladamos flujo al ciclo básico
determinamos el arco que deja la base
actualizamos los potenciales de nodos
(final)

final

Puntos más importantes

- **La base corresponde al árbol de expansión de la red.**
- **Al introducir una nueva variable en la base se forma un ciclo único en el árbol de expansión, y la variable que limita la cantidad de flujo enviada en dicho ciclo abandona la base.**
- **Existe un método más rápido para calcular los nuevos potenciales de nodos, pero no lo veremos aquí.**

Véase la animación

Conclusiones

- **Método simplex para redes**
  - **Técnica de resolución del problema del flujo de coste mínimo**
  - **Basado en los conceptos del método simplex**
  - **Las soluciones básicas son árboles de expansión**