16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural
Primavera 2003
Unidad 2 – Acotación matemática: vectores, notación indicial y convención de suma

Notación indicial

En el curso 16.21 trabajaremos en un espacio tridimensional euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Índice libre: un subíndice $()_i$ se denominará *índice libre* cuando no se repite en el mismo término aditivo en el que aparece. *Libre* significa que el índice representa **todos** los valores de su rango.

- Los índices latinos abarcan desde 1 a, $(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3)$,
- Los índices griegos abarcan desde 1 a 2, $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$.

Ejemplos:

1. a_{i1} implies a_{11}, a_{21}, a_{31}. (un índice libre)

2. $x_a y_b$ implica x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 (dos índices libres).

3. a_{ij} implica a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} (dos índices libres implican 9 valores).

4.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

tiene un índice libre (i), por lo tanto representa tres ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} + b_1 = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + b_2 = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} + b_3 = 0$$

Convención de suma: cuando se encuentra en una expresión *un índice repetido* (dentro de un término aditivo) se implica la suma de los términos que abarcan todos los valores posibles de los índices, esto es:

$$\boxed{a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Observe que la elección de índice es inmaterial:

$$a_i b_i = a_k b_k$$

Ejemplos:

1. $a_{ij} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

2. $t_i = \sigma_{ij} n_j$ implica las **tres** ecuaciones (¿por qué?):

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$
$$t_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$
$$t_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Otras reglas importantes sobre notación indicial:

1. Un índice no puede aparecer más de dos veces en un término aditivo único, es libre o bien repetido sólo una vez.

$a_i = b_{ij} c_j d_j$ es INCORRECTO

2. En una ecuación los *lhs* y *rhs,* así como los términos de ambos lados deben tener los mismos índices libres

- $a_i b_k = c_{ij} d_{kj}$ índices libres *i, k,* CORRECTO
- $a_i b_k = c_{ij} d_{kj} + e_i f_{jj} + g_k p_i q_r$ INCORRECTO, falta el segundo término

  el índice libre *k* y el tercer término tiene el índice libre extra *r*

Vectores

Una *base* en $\mathbb{R}^3$ viene dada por cualquier conjunto de vectores independientes linealmente $\mathbf{e}_i$, ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). A partir de ahora, asumiremos que estos vectores de base son ortonormales, esto es, tienen una longitud unitaria y son ortogonales uno con respecto al otro. Esto se puede expresar mediante productos escalares:

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 . \mathbf{e}_2 = 1, \mathbf{e}_3 . \mathbf{e}_3 = 1,$$

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_3 = 0, \mathbf{e}_2 . \mathbf{e}_3 = 0, ...$$

Utilizando la notación indicial podemos escribir esta expresión de forma muy sucinta, veamos:

$$\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j - \delta_{ij}$$

En esta última expresión the symbol δ_{ij} se define como el delta de *Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} a_i\delta_{ij} =& a_1\delta_{11} + a_2\delta_{21} + a_3\delta_{31}, \\ & a_1\delta_{12} + a_2\delta_{22} + a_3\delta_{32}, \\ & a_1\delta_{13} + a_2\delta_{23} + a_3\delta_{33} \\ =& a_1 1 + a_2 0 + a_3 0, \\ & a_1 0 + a_2 1 + a_3 0, \\ & a_1 0 + a_2 0 + a_3 \\ =& a_1, \\ & a_2, \\ & a_3 \end{aligned}$$

o, de forma más sucinta: $\boxed{a_i\delta_{ij} = a_j}$, esto es, se puede pensar en el delta de Kronecker como un "sustituidor de índices".

Un vector **v** estará representado como:

$$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

Los v_i son los *componentes de* **v** en la base e_i. Estos componentes son las proyecciones del vector sobre los vectores de base:

$$\mathbf{v} = v_j\mathbf{e}_j$$

Tomando el producto escalar con el vector base e_i:

$$\mathbf{v}.\mathbf{e}_i = v_j(\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i) = v_j\delta_{ji} = v_i$$

Transformación de la base

Dadas dos bases e_i, $\tilde{e}_k$ y un vector **v** cuyos componentes en cada una de las bases son v_i y $\tilde{v}_k$, respectivamente, intentamos expresar los componentes de las bases en términos de los componentes en las otras bases. Como el vector es único:

$$\mathbf{v} = \tilde{v}_m\tilde{\mathbf{e}}_m = v_n\mathbf{e}_n$$

Tomando el producto escalar con $\tilde{e}i$ **:**

$$\mathbf{v}.\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{v}_m(\tilde{\mathbf{e}}_m.\tilde{\mathbf{e}}_i) = v_n(\mathbf{e}_n.\tilde{\mathbf{e}}_i)$$

Pero $\tilde{v}_m(\tilde{\mathbf{e}}_m.\tilde{\mathbf{e}}_i) = \tilde{v}_m\delta_{mi} = \tilde{v}_i$ de lo que obtenemos:

$$\boxed{\tilde{v}_i = \mathbf{v}.\tilde{\mathbf{e}}_i = v_j(\mathbf{e_j}.\tilde{\mathbf{e}}_i)}$$

Observe que (*ej.ẽi*) son los cosenos directores de los vectores de base de una base sobre la otra:

$$\mathbf{e}_j.\tilde{\mathbf{e}}_i = ||\mathbf{e}_j||||\tilde{\mathbf{e}}_i|| \cos \widehat{\mathbf{e}_j\tilde{\mathbf{e}}_i}$$