

16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003

Unidad 3 - Cinemática de la deformación

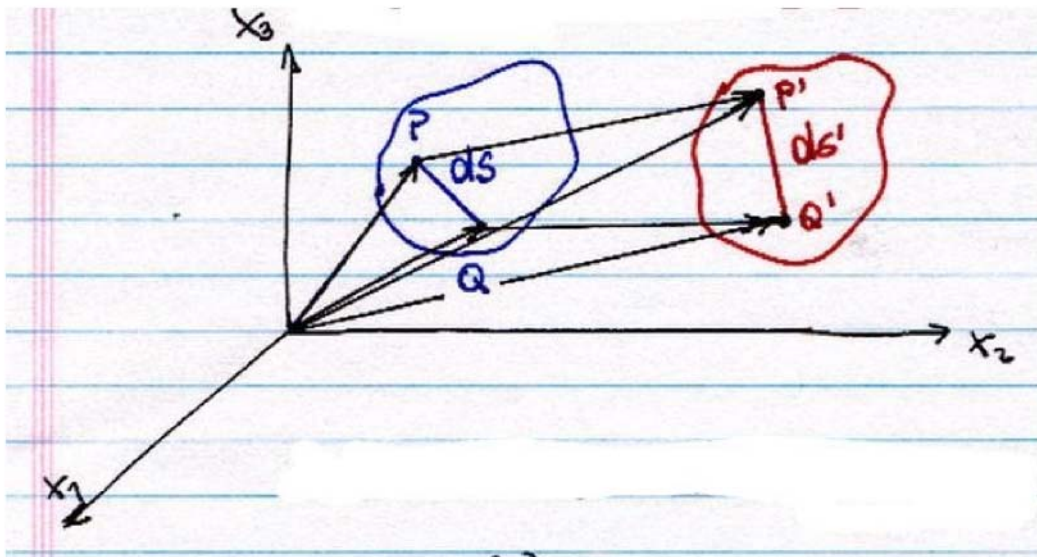


Figura 1: cinemática de los cuerpos deformables

Deformación descrita mediante *representación de la deformación*:

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Intentamos caracterizar el estado local de la deformación del material en una vecindad de un punto P . Tenga en cuenta dos puntos P y Q en la configuración no deformada:

$$P : \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i \quad (2)$$

$$Q : \mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x_i + dx_i)\mathbf{e}_i \quad (3)$$

y en la configuración deformada:

$$P' : \mathbf{x}' = \varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \varphi_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \varphi_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 = \varphi_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \quad (4)$$

$$Q' : \mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = (\varphi_i(\mathbf{x}) + d\varphi_i)\mathbf{e}_i \quad (5)$$

En esta expresión,

$$d\mathbf{x}' = d\varphi_i\mathbf{e}_i \quad (6)$$

Expresando los diferenciales $d\varphi_i$ en términos de las derivadas parciales de las funciones $\varphi_i(x_j \mathbf{e}_j)$:

$$d\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}dx_3, \quad (7)$$

e igualmente para $d\varphi_2, d\varphi_3$, en la notación de índice:

$$d\varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j \quad (8)$$

Sustituyendo en la ecuación (5):

$$Q' : \mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = \left(\varphi_i + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j \right) \mathbf{e}_i \quad (9)$$

$$d\mathbf{x}'_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j\mathbf{e}_i \quad (10)$$

Ahora intentamos calcular el cambio en longitud del segmento \overrightarrow{PQ} que se deformó en el segmento $\overrightarrow{P'Q'}$. Longitud no deformada (al cuadrado):

$$ds^2 = \|d\mathbf{x}\|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i \quad (11)$$

Longitud deformada (al cuadrado):

$$(ds')^2 = \|d\mathbf{x}'\|^2 = d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k \quad (12)$$

El cambio en longitud del segmento \overrightarrow{PQ} viene dado por la diferencia entre las ecuaciones (12) y (11):

$$(ds')^2 - ds^2 = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k - dx_i dx_i \quad (13)$$

Queremos extraer los diferenciales como factores comunes. Para ello observamos que:

$$dx_i dx_i = dx_j dx_k \delta_{jk} \quad (14)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (ds')^2 - ds^2 &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k - dx_j dx_k \delta_{jk} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right)}_{2\epsilon_{jk}: \text{Green-Lagrange strain tensor}} dx_j dx_k \end{aligned} \quad (15)$$

$2\epsilon_{jk}$: Green-Lagrange strain tensor

Asuma que la representación de la deformación $\varphi(\mathbf{x})$ tiene la forma:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (16)$$

donde \mathbf{u} es el *campo de desplazamiento*. Entonces,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (17)$$

y el tensor de la deformación Green-Lagrange se convierte en:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{ij} &= \left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij} \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \delta_{ij} \end{aligned} \quad (18)$$

Tensor de la deformación Green-Lagrange:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (19)$$

Cuando los valores absolutos de las derivadas del campo de desplazamiento son mucho menores que 1, sus productos (la parte no lineal de la deformación) son incluso más pequeños y los despreciamos. Tendremos presente esta hipótesis a lo largo de todo el curso (Consulte el bloc de notas Mathematica que evalúa los límites de esta presunción). Matemáticamente:

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\| \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \sim 0 \quad (20)$$

Definiremos la *parte lineal* del tensor de la deformación Green-Lagrange como el *tensor de la deformación pequeño*:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (21)$$

Transformación de los componentes de la deformación

Dado: ϵ_{ij} , \mathbf{e}_i y una nueva base $\tilde{\mathbf{e}}_k$, determine los componentes de la deformación en la nueva base $\tilde{\epsilon}_{kl}$

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \quad (22)$$

Deseamos colocar las expresiones con tilde en el lado derecho con sus equivalentes sin tilde. Empezamos aplicando la regla en cadena de la diferenciación:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j} \quad (23)$$

Transforme los componentes de desplazamiento:

$$\mathbf{u} = \tilde{u}_m \tilde{\mathbf{e}}_m = u_l \mathbf{e}_l \quad (24)$$

$$\tilde{u}_m (\tilde{\mathbf{e}}_m \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) = u_l (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \quad (25)$$

$$\tilde{u}_m \delta_{mi} = u_l (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \quad (26)$$

$$\tilde{u}_i = u_l (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \quad (27)$$

tome la derivada de \tilde{u}_i con respecto a x_k , como exige la ecuación (23):

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \quad (28)$$

y tome la derivada de la transformación inversa de los componentes del vector de posición \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j = \tilde{x}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (29)$$

$$x_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) = \tilde{x}_k (\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_i) \quad (30)$$

$$x_j \delta_{ji} = \tilde{x}_k (\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_i) \quad (31)$$

$$x_i = \tilde{x}_k (\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_i) \quad (32)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \tilde{x}_j} (\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_i) = \delta_{kj} (\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_i) = (\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i) \quad (33)$$

Sustituyendo las ecuaciones (28) y (33) en (23):

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) (\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad (34)$$

Reemplazando en la ecuación (22):

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) (\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j) (\tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_k) \right] \quad (35)$$

Intercambiando los índices l y k en segundo término:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) (\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k) + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} (\mathbf{e}_k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j) (\tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_l) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) (\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) (\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k) \end{aligned} \quad (36)$$

O, por último:

$$\boxed{\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{lk}(\mathbf{e}_l \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i)(\tilde{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k)} \quad (37)$$

Compatibilidad de deformaciones

Dado el campo de desplazamiento \mathbf{u} , la expresión (21) permite calcular los componentes de deformación ϵ_{ij} . ¿Cómo se contesta a la cuestión inversa? Observe la analogía con el campo de gradiente de potencial. Limite el análisis a dos dimensiones:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad 2\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (38)$$

Diferencie los componentes de deformación del siguiente modo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (2\epsilon_{12}) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \quad (41)$$

para obtener como conclusión que:

$$\boxed{2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2}} \quad (42)$$