16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003
Unidad 8 – Principio de desplazamientos virtuales

Principio de desplazamientos virtuales

Tengamos en cuenta un cuerpo en equilibrio. Sabemos que el campo de esfuerzo debe satisfacer las ecuaciones diferenciales del equilibrio. Multiplique las ecuaciones diferenciales del equilibrio por un campo de desplazamiento "arbitrario" $\bar{u}_i$:

$$(\sigma_{ji,j} + f_i)\bar{u}_i = 0 \tag{1}$$

Observe que el campo $\bar{u}_i$ NO es el campo de desplazamiento real u_i correspondiente a la solución del problema sino un campo de desplazamiento *virtual*. Por lo tanto, la ecuación (1) se puede interpretar como la expresión local del *trabajo virtual* realizado por los *esfuerzos reales* y las fuerzas corporales sobre el *desplazamiento virtual* $\bar{u}_i$ y que debe ser cero. El trabajo virtual total realizado sobre el cuerpo se obtiene mediante integración sobre el volumen:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i)\bar{u}_i dV = 0 \tag{2}$$

y también debe ser cero ya que el integrando es cero en todas partes del dominio.

$$\int_V \sigma_{ji,j}\bar{u}_i dV + \int_V f_i\bar{u}_i dV = 0 \tag{3}$$

$$\int_V \left[(\sigma_{ji}\bar{u}_i)_{,j} - \sigma_{ji}\bar{u}_{i,j}\right)dV + \int_V f_i\bar{u}_i dV = 0 \tag{4}$$

$$\int_S \sigma_{ji}\bar{u}_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} dV + \int_V f_i\bar{u}_i dV = 0 \tag{5}$$

La integral sobre la superficie se puede descomponer en dos: una integral sobre la parte de la frontera donde se especifican las cargas de superficie externas reales (tracciones) S_t y una integral sobre la parte de la frontera donde se especifican los desplazamientos (apoyos) S_u. Esto implica que los conjuntos disjuntos y complementarios, esto es,

$$S = S_u \cup S_t,\ S_u \cap S_t = \emptyset \tag{6}$$

$$\int_{S_t} t_i \bar{u}_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ji} \bar{u}_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV + \int_V f_i \bar{u}_i dV = 0 \tag{7}$$

Requeriremos que los desplazamientos virtuales $\overline{u}_i$ se anulen en S_u, es decir, que el *campo de desplazamiento virtual* satisfaga las *condiciones de frontera esenciales homogéneas:*

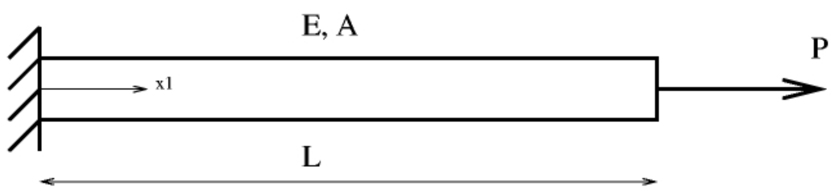
$$\bar{u}_i(x_j) = 0,\ \text{if } x_j \in S_u \tag{8}$$

Entonces, la segunda integral se anula. La expresión resultante es un enunciado del *Principio de los desplazamientos virtuales (PVD):*

$$\boxed{\int_V \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_t} t_i \bar{u}_i dS + \int_V f_i \bar{u}_i dV} \tag{9}$$

Dice: *el trabajo realizado por las tracciones externas y por las fuerzas interiores en un campo de desplazamiento* **admisible** *(diferenciable y que satisfaga las condiciones de frontera homogéneas pero, de otro modo, arbitrario) es igual al trabajo realizado por los esfuerzos equilibrados (la solución real del problema) sobre las deformaciones virtuales (las deformaciones producidas por el campo virtual).*

Ejemplo: considere la barra bajo una carga sometida a tracción que se muestra en la figura:



El PVD aplicado a este caso es:

$$\int_V \sigma_{11} \frac{d\bar{u}_1}{dx_1} dV = P\bar{u}_1\Big|_{x_1=L}$$

$$A\int_0^L E\frac{du_1}{dx_1}\frac{d\bar{u}_1}{dx_1} dx_1 = P\bar{u}_1\Big|_{x_1=L}$$

$$EA\int_0^L \Big[\frac{d}{dx_1}\Big(\frac{du_1}{dx_1}\bar{u}_1\Big) - \frac{d^2u_1}{dx_1^2}\bar{u}_1\Big] dx_1 = P\bar{u}_1\Big|_{x_1=L}$$

$$\Big[EA\frac{du_1}{dx_1}\bar{u}_1\Big]_{x_1=L} - \Big[EA\frac{du_1}{dx_1}\bar{u}_1\Big]_{x_1=0} - EA\int_0^L \frac{d^2u_1}{dx_1^2}\bar{u}_1 dx_1 = P\bar{u}_1\Big|_{x_1=L}$$

El segundo término en el lado izquierdo es cero porque hemos solicitado que $\overline{u}_i = 0$ en el soporte. Observe que no hemos solicitado ninguna condición para $\overline{u}_i$ en $x_1 = L$ donde se aplica la carga.

$$\left[EA\frac{du_1}{dx_1}\bigg|_{x_1=L} - P\right]\bar{u}_1\bigg|_{x_1=L} = EA\int_0^L \frac{d^2u_1}{dx_1^2}\bar{u}_1 dx_1$$

La única manera en que esta expresión se puede satisfacer para cualquier campo de desplazamiento virtual *admisible* $\overline{u}_i$ es si:

$$P = EA\frac{du_1}{dx_1}\bigg|_{x_1=L}$$

y

$$EA\frac{d^2u_1}{dx_1^2} = 0$$

lo que representa las condiciones de equilibrio en la frontera y dentro de la barra, respectivamente:

$$P = A\left(E\frac{du_1}{dx_1}\right)\bigg|_{x_1=L} = A\sigma_{11}\bigg|_{x_1=L}$$

y

$$\frac{d}{dx_1}\left(EA\frac{du_1}{dx_1}\right) = \frac{d}{dx_1}\sigma_{11} = 0$$

La solución de este problema es:

$$u_1(x_1) = ax_1 + b$$

las condiciones de frontera son:

$$u_1(0) = 0 \ \Rightarrow b = 0$$

$$\frac{P}{A} = Ea$$

$$\boxed{u_1 = \frac{P}{EA}x_1}$$

$$\boxed{\epsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{P}{EA}}$$

$$\boxed{\sigma_{11} = E\epsilon_{11} = \frac{P}{A}}$$

Ejemplo: con la solución exacta del problema de la barra bajo una carga sometida a tracción, verifique que el PVD se cumple para los siguientes campos de desplazamientos virtuales:

- $\bar{u}_1 = ax_1$:

$$AE \int_0^L \frac{P}{EA} a dx_1 = PaL(?)$$
$$PaL = PaL \quad q.e.d.$$

- $\bar{u}_1 = ax_1^2$:

$$AE \int_0^L \frac{P}{EA} 2ax_1 dx_1 = PaL^2(?)$$
$$\frac{\cancel{A}\,\cancel{E}P}{\cancel{E}\,\cancel{A}} \cancel{2}a\frac{L^2}{\cancel{2}} = PaL \quad q.e.d.$$

Comentarios:

- Principio de los desplazamientos virtuales:
  - asegura el equilibrio (en forma débil)
  - asegura las condiciones de frontera (natural) de tracción
  - NO asegura las condiciones de frontera (esencial) del desplazamiento
  - se cumplirá en todas las soluciones equilibradas, compatibles o incompatibles

Método de desplazamiento *Unit dummy*

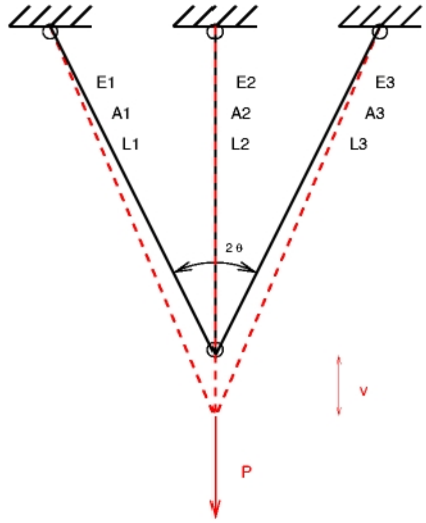
Otra aplicación del PVD: facilita el modo de calcular reacciones (o desplazamientos) en estructuras **directamente a partir del PVD.** Considere la fuerza de reacción concentrada en el punto "0" de una estructura en equilibrio bajo un conjunto de cargas y apoyos. Podemos recomendar un campo de desplazamiento admisible arbitrario $\overline{u}_i$ y el PVD se sostendrá. El método de desplazamiento *unit dummy* consiste en la elección del campo de desplazamiento virtual de modo tal que $\overline{u}_i\,(x_0) = 1$ en la dirección de la reacción R_0 en la que estamos interesados. Entonces, el trabajo virtual de la reacción es $\overline{u}_0 \cdot \mathbf{R}_0 = |\mathbf{R}_0$. Así, el PVD dice (en ausencia de fuerzas interiores):

$$\mathbf{R}_0 \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 = \int_V \sigma_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} dV \tag{10}$$

$$\boxed{R_0 = \int_V \sigma_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} dV} \tag{11}$$

donde $\bar{\epsilon}_{ij}$ son las *deformaciones virtuales* producidas por el *campo de desplazamiento virtual* $\overline{u}_0$.

Ejemplo:



Diferentes áreas y materiales de la sección transversal: $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$, A_1, A_2, A_3. Para un elemento de celosía: $\sigma = E\epsilon$ (estado uniaxial).

$$P\bar{v} = A_1L_1\sigma_1\bar{\epsilon}_1 + A_2L_2\sigma_2\bar{\epsilon}_2 + A_3L_3\sigma_3\bar{\epsilon}_3$$

Observe: los índices en estas expresiones sólo identifican el número de elementos de celosía. El objetivo es facilitar expresiones de los esfuerzos virtuales $\bar{\epsilon}_I$ en términos del desplazamiento virtual $\bar{v}$ a fin de que se anulen. A partir de la figura, las deformaciones que siguen a los elementos de celosía como resultado de un desplazamiento de la punta v son:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 = \epsilon_3 &= \frac{\sqrt{(L_2+v)^2 + (L_2\tan\theta)^2} - L_1}{L1} \\ &= \frac{\sqrt{L_2^2(1+\tan^2\theta) + 2L_2v + v^2} - L_1}{L_1}\end{aligned}$$

despreciando el término de orden superior v^2 y usando $1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ obtenemos:

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \frac{\sqrt{\frac{L_2^2}{\cos^2\theta} + 2L_2v} - L_1}{L_1} = \frac{L_1\sqrt{1 + \frac{2L_2v}{L_1^2}} - L_1}{L_1} = \sqrt{1 + \frac{2L_2v}{L_1^2}} - 1$$

donde hemos utilizado el hecho de que: $\dfrac{L_2}{\cos\theta} = L_1$. Intetamos extraer la parte lineal de esta deformación, la cual debería tener una dependencia lineal sobre el desplazamiento v, lo cual se puede realizar mediante una expansión en series de Taylor del término de la raíz cuadrada $\sqrt{1+2x} = 1 + x + O[x]^2$ (Consejo para Mathematica: las expansiones en serie de Taylor se pueden obtener utilizando la función Series. En este caso: Series[Sqrt[1 + 2x], x, 0, 3].

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1 + \frac{L_2}{L_1^2}v - 1 = \frac{L_2}{L_1^2}v$$

que es la expresión buscada. La expresión para ϵ_2 se puede obtener de una manera mucho más sencilla:

$$\epsilon_2 = \frac{v}{L_2}$$

Aplicando la relación constitutiva: $\sigma_I = E_I\epsilon_I$ podemos obtener los esfuerzos en términos del desplazamiento de la punta v:

$$\sigma_1 = E_1\frac{L_2}{L_1^2}v, \ \sigma_3 = E_3\frac{L_2}{L_1^2}v, \ \sigma_2 = E_2\frac{v}{L_2}$$

Estas expresiones de las deformaciones anteriores también se aplican al caso de un campo de desplazamiento virtual cuyo valor en la punta es $\overline{v}$. Las deformaciones virtuales resultantes son:

$$\bar{\epsilon}_1 = \frac{L_2}{L_1^2}\bar{v}, \ \bar{\epsilon}_3 = \frac{L_2}{L_1^2}\bar{v}, \ \bar{\epsilon}_2 = \frac{\bar{v}}{L_2}$$

S ustituyendo en PVD:

$$P\bar{v} = \underbrace{A_1L_1}\underbrace{E_1\frac{L_2}{L_1^2}v}\underbrace{\frac{L_2}{L_1^2}\bar{v}} + \underbrace{A_2L_2}\underbrace{E_2\frac{v}{L_2}}\underbrace{\frac{\bar{v}}{L_2}} + \underbrace{A_3L_3}\underbrace{E_3\frac{L_2}{L_1^2}v}\underbrace{\frac{L_2}{L_1^2}\bar{v}}$$

Como se esperaba la $\overline{v}$ se elimina, ya que el principio debe regir para todos sus valores virtuales admisibles y obtenemos una expresión de la carga externa P y el desplazamiento verdadero resultante v. Esta expresión se puede simplificar utilizando: $L_2 = L_1 \cos\theta = L_3 \cos\theta$:

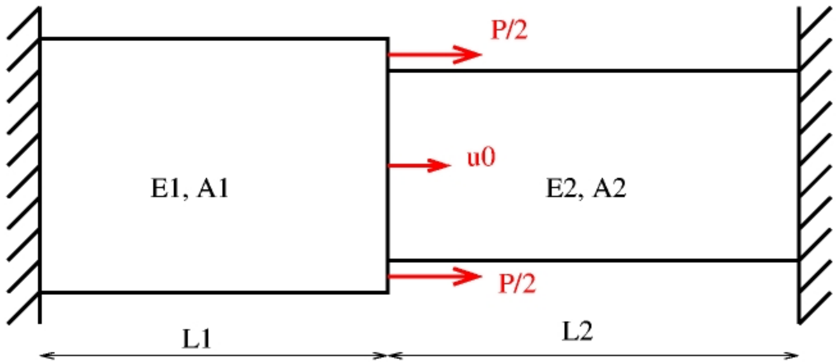
$$P = \frac{A_1E_1L_1^2\cos^2\theta}{L_1^3}v + A_2E_2\frac{v}{L_2} + \frac{A_3E_3L_3^2\cos^2\theta}{L_3^3}v$$

$$P = \left(\frac{A_1E_1\cos^2\theta}{L_1} + \frac{A_2E_2}{L_2} + \frac{A_3E_3\cos^2\theta}{L_3}\right)v$$

$$P = \left[(A_1E_1 + A_3E_3)\cos^3\theta + A_2E_2\right]\frac{v}{L_2}$$

$$\boxed{v = \frac{PL_2}{(A_1E_1 + A_3E_3)\cos^3\theta + A_2E_2}}$$

Ejemplo:



PVD:

$$P\bar{u}_0 = A_1 L_1 \sigma_1 \bar{\epsilon}_1 + A_2 L_2 \sigma_2 \bar{\epsilon}_2$$

$$\epsilon_1 = \frac{u_0}{L_1},\ \sigma_1 = E_1 \epsilon_1,\ \bar{\epsilon}_1 = \frac{\bar{u}_0}{L_1}$$

$$\epsilon_2 = -\frac{u_0}{L_2},\ \sigma_2 = E_2 \epsilon_2,\ \bar{\epsilon}_2 = -\frac{\bar{u}_0}{L_2}$$

$$P\bar{u}_0 = A_1 L_1 E_1 \frac{u_0}{L_1}\frac{\bar{u}_0}{L_1} + A_2 L_2 E_2 \frac{(-u_0)}{L_2}\frac{(-\bar{u}_0)}{L_2}$$

$$\boxed{P = \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2}\right) u_0}$$