16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural
Primavera 2003
Unidad 1

En este curso vamos a poner el acento en los *métodos variacionales y energéticos* para el análisis estructural. Para entender el enfoque general vamos a empezar por contrastarlo con el método alternativo de *mecánica vectorial*:

Ejemplo de formulación de la mecánica vectorial:

Tenga en cuenta una viga con un apoyo sencillo sujeta a una carga uniformemente distribuida q_0, (véase Fig.1). Para analizar el equilibro de la viga estudiamos el diagrama de cuerpo libre de un elemento de longitud Δx como el mostrado en la figura y aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = 0 \; : \; V - q_0 \Delta x - (V + \Delta V) = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_B = 0 \; : \; -V \Delta x - M + (M + \Delta M) + (q_0 \Delta x) \frac{\Delta x}{2} = 0 \tag{2}$$

Si dividimos por Δx y tomamos el límite $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dV}{dx} = -q_0 \tag{3}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{4}$$

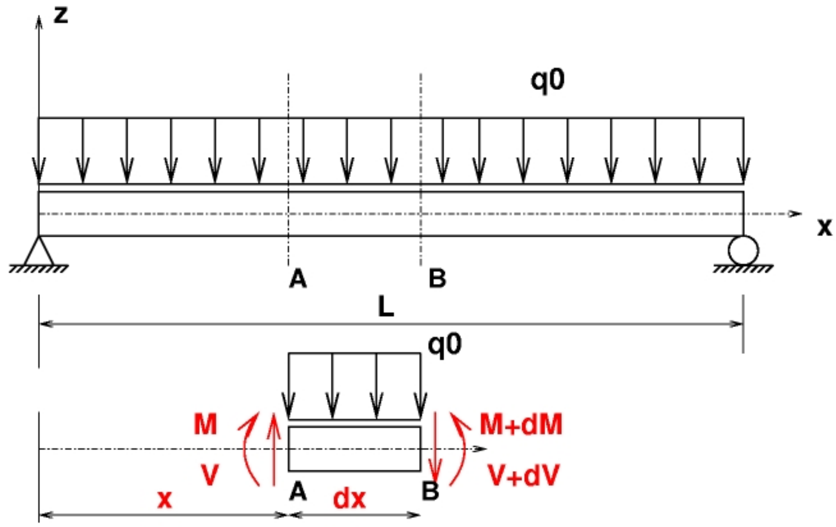

Figura 1: Equilibrio de una viga con soporte sencillo

Si eliminamos V , obtenemos:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q_0 = 0 \tag{5}$$

Recuerde del curso 16.20 (en este curso repasaremos más adelante este concepto) que el momento de la curvatura está relacionado con la desviación de la viga $w(x)$ mediante la ecuación:

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{6}$$

donde E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la viga. Si combinamos 5 y 6, tenemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + q_0 = 0, \quad 0 < x < L \tag{7}$$

Las condiciones de frontera de la viga son:

$$w(0) = w(L) = 0, \quad M(0) = M(L) = 0 \tag{8}$$

La solución de las ecuaciones 7 y 8 viene dada por

$$w(x) = -\frac{q_0}{24EI} x\,(L - x)\left(L^2 + Lx - x^2\right) \tag{9}$$

Formulación variacional correspondiente

El mismo problema se puede formular de manera variacional introduciendo la energía potencial del sistema de viga:

$$\Pi(w) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + q_0 w \right] dx \tag{10}$$

y exigiendo que la solución *w(x)* sea la función que la minimiza y que también satisface las condiciones en la frontera de desplazamiento:

$$w(0) = w(L) = 0 \tag{11}$$

Una utilización especialmente atractiva de la formulación variacional yace en la determinación de soluciones aproximadas. Busquemos una solución aproximada al ejemplo de la viga anterior de la forma:

$$w_1(x) = c_1 x(L - x) \tag{12}$$

que tiene una derivada continua segunda y satisface las condiciones de frontera de 11. Sustituyendo *wi* (*x*) en 10 obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pi(c_1) &= \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (-2c_1)^2 + q_0 c_1 (Lx - x^2) \right] dx \\ &= 2EILc_1^2 + \frac{L^3}{6} q_0 c_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Observe que nuestro funcional II ahora depende sólo de c_1. w_l (x) es una solución aproximada a nuestro problema si c_1 minimiza II = II(c_1). Una condición necesaria para ello es:

$$\frac{d\Pi}{dc_1} = 4EILc_1 + q_0 \frac{L^3}{6} =$$

o $c_l = -\frac{q_0 L^2}{24EI}$, y la solución aproximada se convierte en:

$$w_1(x) = -\frac{q_0 L^2}{24EI} x(L - x)$$

Para evaluar la exactitud de nuestra solución aproximada, calculemos la desviación aproximada de la viga en el punto medio $\delta_1 = w_1(\frac{L}{2})$:

$$\delta = -\frac{q_0 L^2}{24EI} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = -\frac{q_0 L^4}{96EI}$$

El valor exacto $\delta = w(\frac{L}{2})$ se obtiene de la ecuación 9 como:

$$\delta = -\frac{q_0}{24EI}\frac{L}{2}\left(L-\frac{L}{2}\right)\left[L^2 + L\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = -\frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

Observamos que:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\frac{1}{96}}{\frac{5}{384}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

esto es, la solución aproximada se queda corta en un 20% al predecir la desviación máxima. Si embargo, si tenemos en cuenta la siguiente aproximación con 3 grados de libertad (observe que también satisface las condiciones de frontera esenciales, ecuación.11):

$$w_3(x) = c_1 x(L-x) + c_2 x^2(L-x) + c_3 x(L-x)^2 \qquad (14)$$

y requiere que 11(c_1, c_2, c_3) sea un mínimo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_3} = 0,$$

i.e.:

$$4\,c1\,EI\,L + 2\,c2\,EI\,L^2 + 2\,c3\,EI\,L^3 + \frac{L^3\,q0}{6} = 0$$

$$2\,c1\,EI\,L^2 + 4\,c2\,EI\,L^3 + 4\,c3\,EI\,L^4 + \frac{L^4\,q0}{12} = 0$$

$$2\,c1\,EI\,L^3 + 4\,c2\,EI\,L^4 + \frac{24\,c3\,EI\,L^5}{5} + \frac{L^5\,q0}{20} = 0$$

cuya solución es

$$\boxed{c1 \rightarrow \frac{-\left(L^2\,q0\right)}{24\,EI}, c2 \rightarrow \frac{-\left(L\,q0\right)}{24\,EI}, c3 \rightarrow \frac{q0}{24\,EI}}$$

Si se reemplazan estos valores en la ecuación 14 y se evalúa la desviación en el punto medio de la viga, se obtiene la solución exacta.