

16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003

Unidad 2 – Esfuerzo y balance de momentum

Esfuerzo en un punto

Las fuerzas ejercidas sobre un material pueden ser internas o externas. Las fuerzas externas son de dos tipos: esfuerzo en el cuerpo (por unidad de masa o volumen) y esfuerzo en la superficie (por unidad de área). Si cortamos un cuerpo de material en equilibrio bajo un conjunto de fuerzas externas a lo largo de un plano, tal y como se muestra en la Figura 1, y consideramos uno de sus lados, extraemos dos conclusiones: 1) el equilibrio que proporcionan las cargas del lado eliminado es facilitado por un conjunto de fuerzas que se distribuyen entre las partículas de material adyacentes al plano de corte y que deberían facilitar un conjunto de fuerzas equivalentes a las que cargan la parte eliminada, 2) estas fuerzas pueden considerarse ahora como fuerzas de superficie externa que actúan sobre la parte de material que está en estudio.

El vector de esfuerzo en un punto sobre ΔS se define como:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}}{\Delta S} \quad (1)$$

Si el corte se hubiese realizado sobre el mismo punto en cuestión pero en un plano con una normal distinta, el vector de esfuerzo \mathbf{t} habría sido diferente. Tengamos en cuenta los tres vectores de esfuerzo $\mathbf{t}^{(i)}$ que actúan sobre los planos normal a los ejes coordinados. Descompongamos también cada $\mathbf{t}^{(i)}$ en sus tres componentes en el sistema coordinado e_i (lo que se puede hacer para cualquier vector) como (véase Fig. 2):

$$\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2)$$

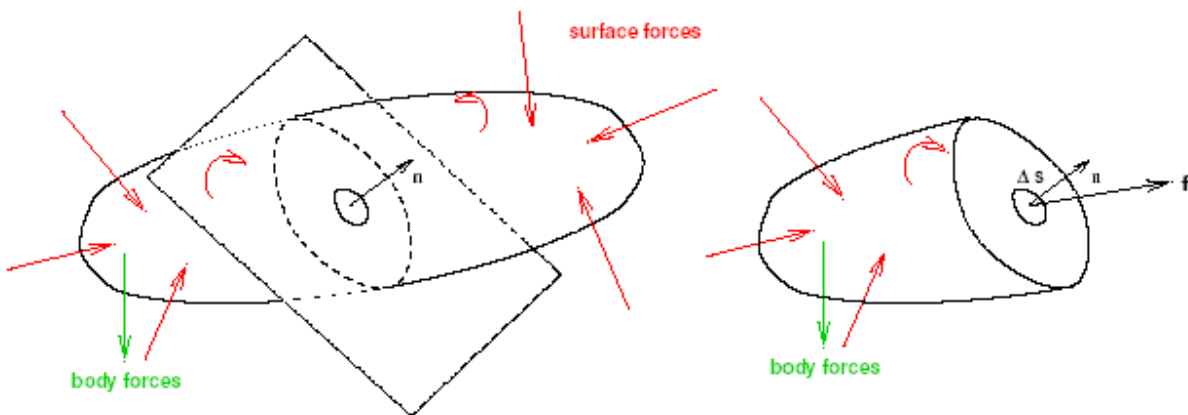


Figura 1: esfuerzo de superficie f sobre el área ΔS de la sección de corte por plano cuya normal es \mathbf{n} .

σ_{ij} es el componente del vector de esfuerzo $\mathbf{t}^{(i)}$ a lo largo de la dirección \mathbf{e}_j .

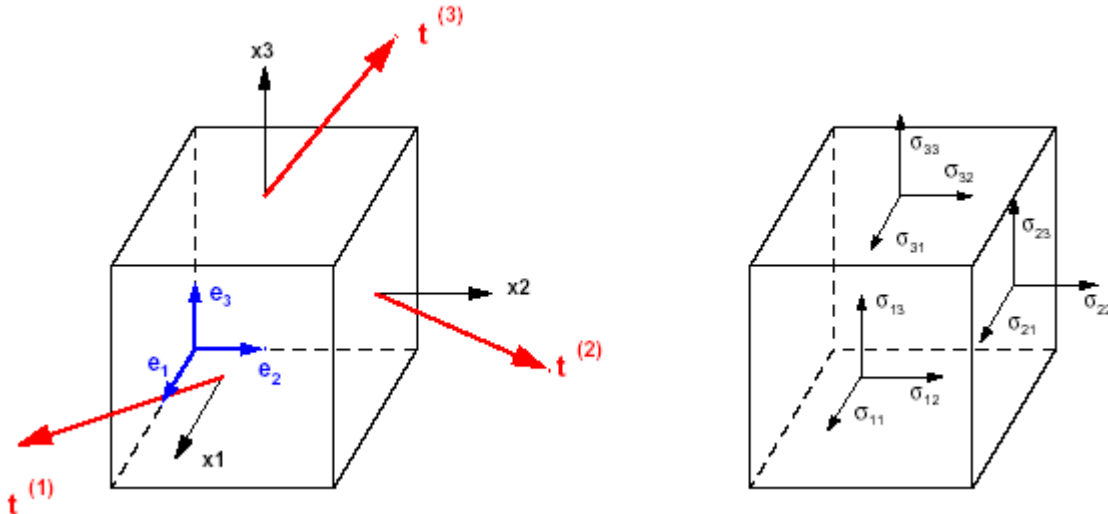


Figura 2: componentes del esfuerzo

Tensor de esfuerzo

Podemos seguir analizando diferentes planos que pasen a través del mismo punto con normales diferentes y, por lo tanto, vectores de esfuerzo diferentes $\mathbf{t}^{(n)}$ y cabría preguntarse si existe alguna relación entre ellos o si son todos independientes. Encontraremos la respuesta si invocamos al equilibrio en el tetraedro (en contracción) de material de la Figura 3. Las áreas de las caras del tetraedro son ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 y ΔS . Los vectores de esfuerzo sobre planos con normales invertidas ($\mathbf{t} - \mathbf{e}_i$) han sido sustituidos por $-\mathbf{t}^{(i)}$ utilizando la tercera ley de Newton de acción y reacción (que de hecho se deriva del equilibrio): $\mathbf{t}^{(-n)} = -\mathbf{t}^{(n)}$.

Si aplicamos el equilibrio tenemos:

$$\mathbf{t}^{(n)} \Delta S - \mathbf{t}^{(1)} \Delta S_1 - \mathbf{t}^{(2)} \Delta S_2 - \mathbf{t}^{(3)} \Delta S_3 = 0 \quad (3)$$

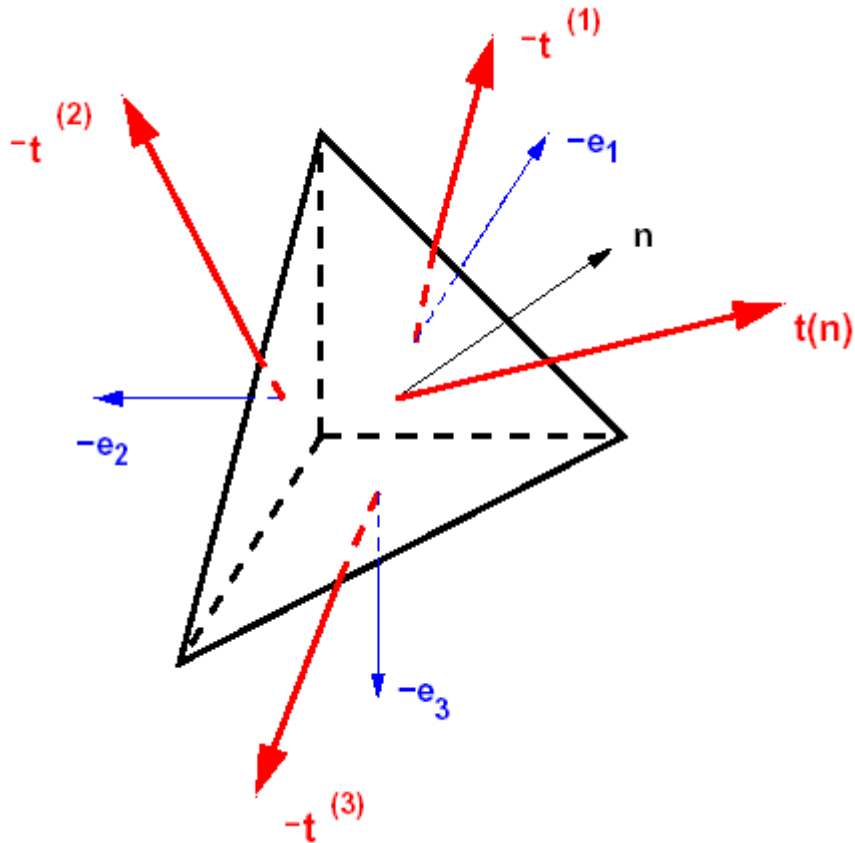


Figura 3: tetraedro de Cauchy que representa el equilibrio de un tetraedro en contracción hacia un punto

donde ΔV es el volumen del tetraedro y f es la fuerza corporal por unidad de volumen. La siguiente relación: $\Delta S n_i = \Delta S_i$ derivada en el siguiente apunte matemático:

En virtud del Teorema de Green:

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_S \mathbf{n} \phi dS$$

aplicado a la función $\phi = 1$, obtenemos:

$$0 = \int_S \mathbf{n} dS$$

lo que aplicado a nuestro tetraedro da:

$$0 = \Delta S \mathbf{n} - \Delta S_1 \mathbf{e}_1 - \Delta S_2 \mathbf{e}_2 - \Delta S_3 \mathbf{e}_3$$

Si tomamos el producto escalar de esta ecuación con \mathbf{e}_i , obtenemos:

$$\Delta S(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) = \Delta S_i$$

o

$$\boxed{\Delta S_i = \Delta S n_i}$$

se puede sustituir en la ecuación 3 para obtener:

$$\Delta S(\mathbf{t}^{(n)} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{t}^{(1)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{t}^{(2)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{t}^{(3)}) = 0$$

o

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_1\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{e}_2\mathbf{t}^{(2)} + \mathbf{e}_3\mathbf{t}^{(3)}) \quad (4)$$

El factor entre paréntesis es la definición del tensor de esfuerzo de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_1\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{e}_2\mathbf{t}^{(2)} + \mathbf{e}_3\mathbf{t}^{(3)} = \mathbf{e}_i\mathbf{t}^{(i)}} \quad (5)$$

Obsérvese que se trata de una expresión tensorial (independiente de los componentes de tensor y vector en un sistema coordinado particular). Para obtener los componentes tensoriales en nuestro sistema rectangular reemplazamos las expresiones de $\mathbf{t}^{(i)}$ de la ecuación 2.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_i\sigma_{ij}\mathbf{e}_j \quad (6)$$

Sustituyendo en la ecuación 4:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

o bien:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \sigma_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma_{ij}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = (\sigma_{ij}n_i)\mathbf{e}_j \quad (8)$$

$$t_i = \sigma_{ki}n_k \quad (9)$$

Transformación de los componentes de esfuerzo

Consideremos un sistema diferente de coordenadas cartesianas e'_i . Podemos expresar nuestro tensor en cada una de ellas:

$$\sigma = \sigma_{kl} e_k e_l = \sigma'_{mn} e'_m e'_n \quad (10)$$

Deseamos poner en relación los componentes de esfuerzo en uno de los dos sistemas, para ello tomamos el producto escalar de (10) con e'_i y e'_j :

$$e'_i \cdot \sigma \cdot e'_j = \sigma_{kl} (e'_i \cdot e_k) (e_l \cdot e'_j) = \sigma'_{mn} (e'_i \cdot e'_m) (e'_n \cdot e'_j) = \sigma'_{mn} \delta_{im} \delta_{nj} = \sigma'_{ij}$$

o

$$\boxed{\sigma'_{ij} = \sigma_{kl} (e'_i \cdot e_k) (e_l \cdot e'_j)} \quad (11)$$

Los factores entre paréntesis son las directrices de coseno de los ángulos entre los ejes coordinados original y principal.

Direcciones y esfuerzos principales

Dados los componentes del sector de esfuerzos en un sistema de coordenadas dado, la determinación de la normal máxima y de los esfuerzos cortantes es fundamental para el diseño de estructuras. Los componentes de esfuerzo cortante y esfuerzo normal en un plano con normal \mathbf{n} vienen dados por:

$$\begin{aligned} t_N &= \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n} \\ &= \sigma_{ki} n_k n_i \\ t_S &= \sqrt{\|\mathbf{t}^{(n)}\|^2 - t_N^2} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se desprende claramente que el componente normal logra su máximo $t_N = \|\mathbf{t}^{(n)}\|$ cuando los componentes cortantes son cero. En este caso:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \sigma = \lambda \mathbf{n} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{n}$$

o en componentes:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ki}n_k &= \lambda n_i \\
\sigma_{ki}n_k &= \lambda \delta_{ki}n_k \\
(\sigma_{ki} - \lambda \delta_{ki})n_k &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

lo que significa que los esfuerzos principales se obtienen resolviendo el problema del autovalor, las directrices principales son los autovectores del problema. Los autovalores λ se obtienen señalando que la última identidad se puede satisfacer para \mathbf{n} no trivial sólo si el factor es singular, esto es, si su determinante desaparece:

$$\begin{vmatrix}
\sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\
\sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\
\sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda
\end{vmatrix} = 0$$

lo que nos conduce a la *ecuación característica*:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

donde:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{13}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \tag{14}$$

$$I_3 = \det[\boldsymbol{\sigma}] = \|\sigma_{ij}\| \tag{15}$$

se denominan las invariantes de esfuerzo porque no dependen del sistema coordinado de elección.

Balance de momentum angular y lineal

Vamos a derivar las ecuaciones del balance de momentum en forma integral, ya que esta es la formulación que está más alineada con nuestro enfoque “integral” en este curso. Partimos de la definición de momentum angular y lineal. Para un elemento de material en posición \mathbf{x} de volumen dV , densidad ρ , masa ρdV que permanece constante, moviéndose a velocidad \mathbf{v} , el momento lineal es $\rho \mathbf{v} dV$ y el momento angular $\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v} dV)$. Los momentos totales del cuerpo se obtienen por integración sobre el volumen como:

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV \quad \text{y} \quad \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV$$

respectivamente. El principio de conservación del momentum lineal establece que la tasa de cambio del momentum lineal es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (16)$$

donde $\frac{D}{Dt}$ es la derivada total. El lhs se puede expandir como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\rho dV) \mathbf{v} + \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV$$

pero $\frac{D}{Dt} (\rho dV) = 0$ a partir de la conservación de la masa, por lo que el principio dice:

$$\int_V \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (17)$$

Ahora, utilizando lo que hemos aprendido de las tracciones y su relación con el tensor de esfuerzos:

$$\boxed{\int_V \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS} \quad (18)$$

Esta es la ecuación de balance del momentum lineal en forma integral. Podemos reemplazar la integral de superficie por una integral de volumen con la ayuda del teorema de divergencia:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$$

y entonces (18) se convierte en:

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) dV = 0$$

Como este principio se aplica a un volumen arbitrario de material, la función por integrar debe desaparecer:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (19)$$

Esta es la ecuación de balance del momentum lineal en forma diferencial. En componentes:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Balance de momento angular y la simetría del tensor de esfuerzo

El principio de conservación del momentum angular establece que la tasa de cambio del momento angular es igual a la suma del momento de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS \quad (20)$$

En la práctica se puede escribir:

$$\int_S (x_i t_j - x_j t_i) dS + \int_V (x_i f_j - x_j f_i) dV = \int_V \left(x_i \frac{\partial v_j}{\partial t} - x_j \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) dV$$

Utilizando $t_i = \sigma_{ki} n_k$ el teorema de divergencia y (19) esta expresión conduce a (ver tarea en casa):

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) dV = 0$$

lo que se aplica a un volumen arbitrario V , y por tanto, sólo se puede satisfacer si la función integral desaparece, lo que implica:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \quad (21)$$