16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003
Unidad 5 – Ecuaciones constitutivas

Ecuaciones constitutivas

Para materiales elásticos:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon) = \rho \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{1}$$

Si la relación es lineal:

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}}, \text{ Ley generalizada de Hooke} \tag{2}$$

En esta expresión: El tensor de cuarto orden C_{ijkl} de las propiedades del material o *módulo elástico* (¿cuántas constantes materiales?). Utilizando la simetría del tensor de esfuerzo:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{jikl} = C_{ijkl} \tag{3}$$

Prueba mediante ejemplo (generalizable):

$$\begin{gathered}
\sigma_{21} = C_{21kl}\epsilon kl, \; \sigma_{12} = C_{12kl}\epsilon_{kl} \\
\sigma_{21} = \sigma_{12} \Rightarrow C_{21kl}\epsilon kl = C_{12kl}\epsilon_{kl} \\
(C_{21kl} - C_{12kl})\epsilon_{kl} = 0 \Rightarrow \\
C_{21kl} = C_{12kl}
\end{gathered}$$

lo que generaliza el enunciado. Esto reduce el número de constantes de material de 81 a 54. De modo similar, podemos utilizar la simetría del tensor de deformación.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \;\Rightarrow C_{ijlk} = C_{ijkl} \tag{4}$$

Esto reduce de nuevo el número de constantes de material a 36. Para reducir aún más el número de constantes de material considere la conclusión de la primera ley para los materiales elásticos, ecuación (1):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \epsilon_{ij}},\ \widehat{U}: \quad \text{densidad de energía de deformación por unidad de vol.} \tag{5}$$

$$C_{ijkl}\epsilon_{kl} = \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{mn}}\left(C_{ijkl}\epsilon_{kl}\right) = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \epsilon_{mn}\partial \epsilon_{ij}} \tag{7}$$

$$C_{ijkl}\delta_{km}\delta_{ln} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \epsilon_{mn}\partial \epsilon_{ij}} \tag{8}$$

$$C_{ijmn} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \epsilon_{mn}\partial \epsilon_{ij}} \tag{9}$$

Asumiendo la equivalencia de los parciales mixtos:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \epsilon_{kl}\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \epsilon_{ij}\partial \epsilon_{kl}} = C_{klij} \tag{10}$$

Esto vuelve a reducir el número de constantes de material a 21. Por lo tanto, el material elástico lineal anisotrópico más general tiene 21 constantes de material. Vamos a adoptar la notación de Voigt*:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & symm & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Cuando el material tiene simetrías en su estructura, el número de constantes de material se reduce aún más (véase Tratamiento unificado de este material). Vamos a concentrarnos en el caso isotrópico:

Materiales elásticos lineales isotrópicos
El tensor isotrópico de cuarto orden más general:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{12}$$

Sustituyendo en:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{13}$$

da:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\epsilon_{kk} + \mu\left(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}\right) \tag{14}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\epsilon_{kk} + \mu\left(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}\right)} \tag{15}$$

Ejemplos:

$$\sigma_{11} = \lambda \delta_{11}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}\right) + \mu\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\right) = \left(\lambda + 2\mu\right)\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{33} \tag{16}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} \tag{17}$$

Problema práctico: escriba en Mathematica la matriz de coeficientes *C* (módulo elástico) para un material istrópico (en forma Voigt).

Matriz de cumplimiento de un material elástico isotrópico

A partir de los experimentos descubrimos:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right] \tag{18}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right] \tag{19}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] \tag{20}$$

$$2\epsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G}, \quad 2\epsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G}, \quad 2\epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \tag{21}$$

En estas expresiones, E es el módulo de Young, v el ratio de Poisson y G el módulo de rigidez. Se denominan *constantes técnicas,* ya que se obtienen de experimentos. En Tratamiento unificado demostramos que $G = \dfrac{E}{2(1+v)}$. Estas expresiones se pueden escribir en la siguiente forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & symm & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Invierta y compare con:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & symm & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{23}$$

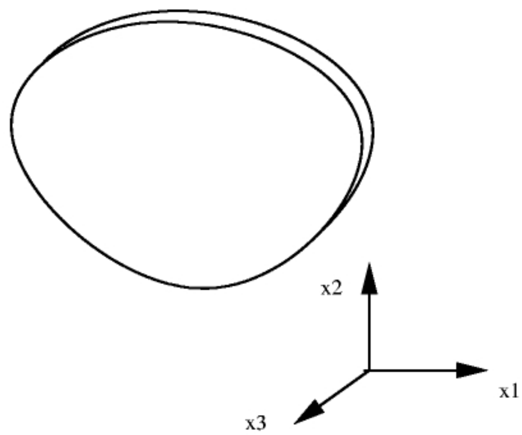
y concluya que:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G \tag{24}$$

Esfuerzo de plano

Considere situaciones en las que:

$$\sigma_{i3} = 0 \tag{25}$$



.

Entonces:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\big(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\big) \tag{26}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E}\big(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\big) \tag{27}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{-\nu}{E}\big(\sigma_{11} + \sigma_{22}\big) \neq 0\,!!! \tag{28}$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{13} = 0 \tag{29}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = \frac{(1+\nu)\sigma_{12}}{E} \tag{30}$$

En forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{31}$$

La inversión da la relación entre los esfuerzos y las deformaciones para el *esfuerzo de plano:*

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}} \tag{32}$$

Deformación de plano

En este caso consideramos situaciones en las que:

$$\epsilon_{i3} = 0 \tag{33}$$

Entonces:

$$\epsilon_{33} = 0 = \frac{1}{E}\Big[\sigma_{33} - \nu\big(\sigma_{11} + \sigma_{22}\big)\Big], \text{ or:} \tag{34}$$

$$\sigma_{33} = \nu\big(\sigma_{11} + \sigma_{22}\big) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{E}\Big\{\sigma_{11} - \nu\big[\sigma_{22} + \nu\big(\sigma_{11} + \sigma_{22}\big)\big]\Big\} \\ &= \frac{1}{E}\Big[\big(1-\nu^2\big)\sigma_{11} - \nu\big(1+\nu\big)\sigma_{22}\Big]\end{aligned} \tag{36}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E}\Big[\big(1-\nu^2\big)\sigma_{22} - \nu\big(1+\nu\big)\sigma_{11}\Big] \tag{37}$$

En forma de matriz:

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ 2\epsilon_{12}\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0\\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \tag{38}$$

La inversión da la relación entre los esfuerzos y las deformaciones para la *deformación de plano:*

$$\boxed{\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ 2\epsilon_{12}\end{bmatrix}} \tag{39}$$

Problema práctico: verifique las ecuaciones (32) y (39) con Mathematica.

0.0.1 Deformaciones térmicas

Vamos a estudiar las deformaciones producidas por cambios de temperatura (ϵ^{θ}). Estas deformaciones son de índole dilatacional (expansión térmica o contracción) y no causan ningún corte. Las deformaciones térmicas son proporcionales a los cambios de temperatura. Para materiales isotrópicos:

$$\epsilon_{ij}^{\theta} = \alpha\Delta\theta\delta_{ij} \tag{40}$$

Las deformaciones totales (ϵ_{ij}) se deben entonces a la contribución (aditiva) de las *deformaciones mecánicas* (ϵ_{ij}^{M}), esto es, las producidas por los esfuerzos y las deformaciones térmicas:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{M} + \epsilon_{ij}^{\theta} \tag{41}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}^{M} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{\theta}), \quad \text{or} \tag{42}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \alpha\Delta\theta\delta_{kl})} \tag{43}$$

Problema práctico: escriba la relación entre esfuerzos y deformaciones para un material elástico isotrópico cuyas constantes de Lamé son λ y μ y cuyo coeficiente de expansión térmica es α.
