# 16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

## Primavera 2003
## Unidad 7 – Conceptos de trabajo y energía
## Energía de deformación y energía potencial de una viga

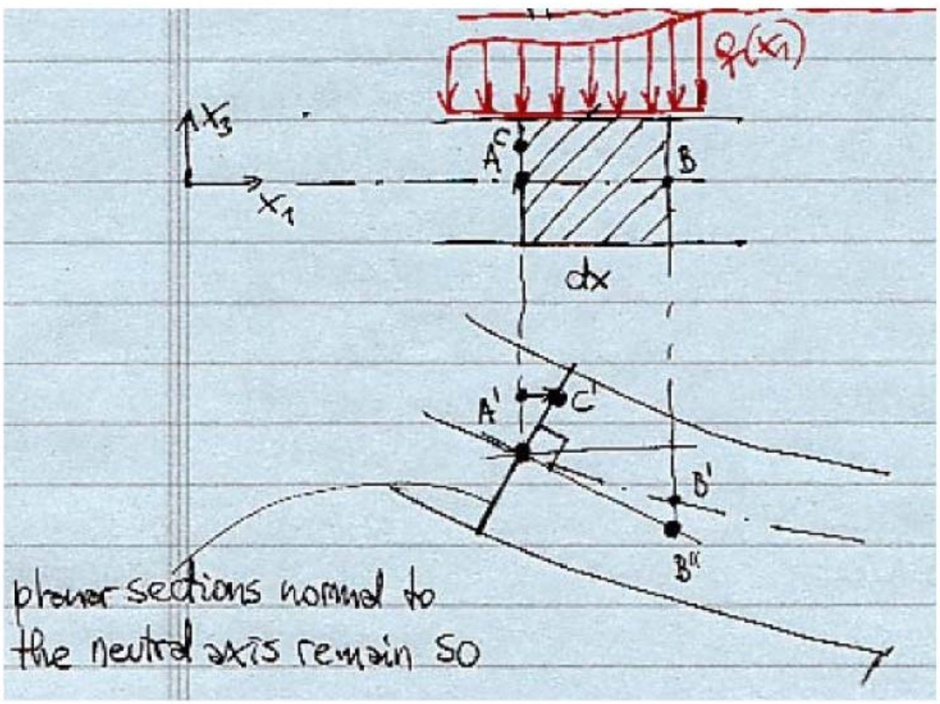



Figura 1: asunciones cinemáticas para una viga

**Asunciones cinemáticas para una viga:** de la figura: $\bar{AA'} = u_3(x_1)$.

Asuma pequeñas desviaciones: $B' \sim B'', \bar{BB''} = u_3 + du_3$. $\bar{CC'} = u_3(x) + u1(x_1, x_3)$. Asuma que *las secciones planares normales al eje neutral permanecen planares tras la deformación.*

Entonces:

$$u_3 = u_3(x_1) \tag{1}$$

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 \frac{du_3}{dx_1} \tag{2}$$

$u_3(x_1)$ es el único primario desconocido del problema (3)

De estas asunciones cinemáticas podemos derivar una teoría para vigas.

Deformaciones:

$$\boxed{\epsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = -x_3 \frac{d^2u_3}{dx_1^2}} \tag{4}$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11}, \text{ esfuerzo plano} \tag{5}$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dx_3} + \frac{du_3}{dx_1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{du_3}{dx_1} + \frac{du_3}{dx_1}\right) = 0 \tag{6}$$

Constitutiva:

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11} = -Ex_3 \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \tag{7}$$

**Equilibrio:** aplique el equilibrio (en la configuración no deformada) a las *cantidades integrales* (momento *M* fuerza de corte *V*). Definiciones de cantidades integrales como fuerzas "equivalentes" a los esfuerzos internos:

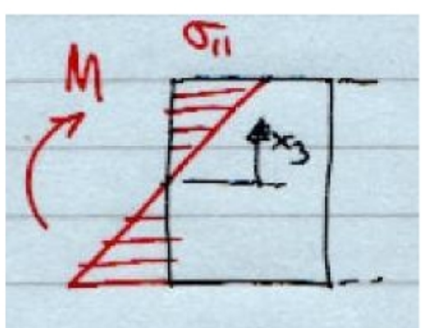
$$V(x_1) + \int_{A(x_1)} \sigma_{13} d_A = 0 \tag{8}$$

$$M(x_1) + \int_{A(x_1)} \sigma_{11} x_3 dA = 0 \tag{9}$$

susti tuyendo $\sigma_{11}$:

$$M(x_1) = \int_{A(x_1)} \left(-E\frac{d^2u_3}{dx_1^2} x_3^2\right) dA = E\frac{d^2u_3}{dx_1^2} \underbrace{\int_{A(x_1)} x_3^2 dA} \tag{10}$$

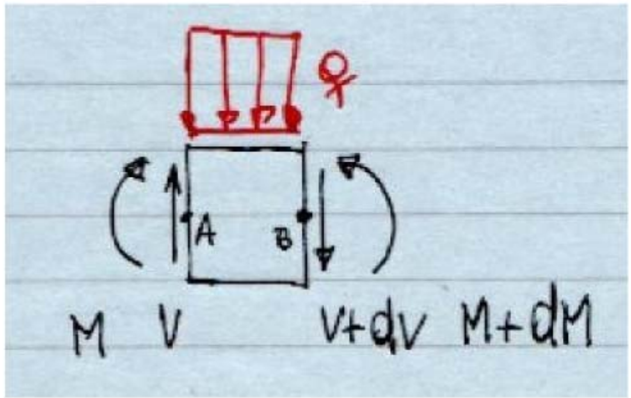
$$\boxed{M(x_1) = EI(x_1)\frac{d^2u_3}{dx_1^2}} \tag{11}$$



Observe también:

$$\boxed{\sigma_{11} = -\frac{M x_3}{I}} \tag{12}$$

Con estas definiciones podemos aplicar el equilibrio como se muestra en la figura:




$$\sum F_{x_3} = 0 : \quad V - q dx_1 - V - dV = 0 \;\rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx_1} = -q} \tag{13}$$

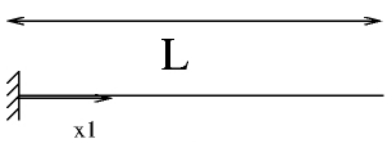
$$\sum M^B = 0 : -M + M + dM - V dx_1 + q\frac{dx_1^2}{2} = 0 \;\rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx_1} = V} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx_1}\Big(\frac{dM}{dx_1}\Big) = -q \;\rightarrow \boxed{\frac{d^2M}{dx_1^2} = -q} \tag{15}$$

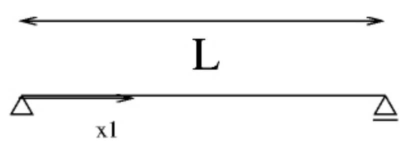
Sustituyendo la ecuación (11) en la última expresión:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx_1^2}\Big(EI\frac{d^2u_3}{dx_1^2}\Big) + q(x_1) = 0} \tag{16}$$

Ecuación diferencial de cuarto orden que rige las desviaciones de las vigas. Necesita 4 condiciones de frontera. Ejemplos:




a)




b)

- caso a $u_3(0) = 0,\; u_3'(0) = 0,\; u_3''(L) = 0,\; u_3'''(L) = 0.$
- caso a $u_3(0) = 0,\; u_3''(0) = 0,\; u_3(L) = 0,\; u_3''(L) = 0.$

**Energía de deformación de una viga.** Comencemos por la definición general de densidad de energía de deformación:

$$\widehat{U} = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \tag{17}$$

para un material elástico lineal concluimos:

$$\widehat{U} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \tag{18}$$

Teoría para vigas clásica: $\sigma_{11} \neq 0$, el resto de los componentes de esfuerzo son cero.

$$\widehat{U} = \frac{1}{2}\sigma_{11}\epsilon_{11} = \frac{1}{2}E\epsilon_{11}^2 \tag{19}$$

$$\epsilon_{11} = -x_3\frac{d^2u_3}{dx_1^2} \rightarrow \widehat{U} = \frac{1}{2}Ex_3^2\left(\frac{d^2u_3}{dx_1^2}\right)^2 \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

$$U = \int_V \widehat{U} dV = \int_V \frac{1}{2}Ex_3^2\left(\frac{d^2u_3}{dx_1^2}\right)^2 dV \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L E\left(\frac{d^2u_3}{dx_1^2}\right)^2 \int_{A(x)} x_3^2 dA dx_1 \tag{23}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{d^2u_3}{dx_1^2}\right)^2 dx_1} \tag{24}$$

$$\text{observe también} \tag{25}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^L M(x_1)\frac{d^2u_3}{dx_1^2}dx_1} \tag{26}$$

**Energía de deformación complementaria de una viga**

Densidad de energía de deformación complementaria:

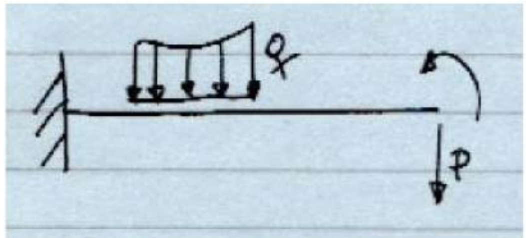
$$\widehat{U}_c = \int_0^{\epsilon_{11}} \epsilon_{11} d\sigma_{11} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{11}^2}{E} = \frac{1}{2E}\left(\frac{-Mx_3}{I}\right)^2 \tag{27}$$

Entonces, la energía de deformación complementaria es:

$$U_c = \int_V \widehat{U}_c dV = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI^2}\int_{A(x_1)} x_3^2 dA dx_1 \tag{28}$$

$$\boxed{U_c = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx_1} \tag{29}$$

**Potencial de las fuerzas externas:**




$$V = -\int_S t_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV \quad (30)$$

$$\boxed{V = -\int_0^L q(x_1)u_3(x_1)dx_1 - Pu_3(L) - Mu_3'(L)} \quad (31)$$

La energía potencial total de la viga es:

$$\boxed{\Pi(u_3) = \int_0^L \Big[\frac{1}{2}EI\Big(\frac{d^2u_3}{dx^2}\Big)^2 dx_1 + qu_3\Big] + Pu_3(L) + Mu_3'(L)} \quad (32)$$

Es la expresión que dimos el primer día de clase.