16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003
Unidad 10 – Principio de energía potencial mínima y primer teorema de Castigliano

Principio de la energía potencial mínima

El principio de los desplazamientos virtuales se aplica al margen de la ley constitutiva. Limita la atención a los materiales elásticos (posiblemente no lineales). Comienza a partir del PVD:

$$\boxed{\int_V \sigma_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_S t_i \bar{u}_i dS + \int_V f_i \bar{u}_i dV,\ \forall \bar{u}/\bar{u} = 0 \text{ on } S_u} \tag{1}$$

Reemplazando la expresión para las tensiones de los materiales elásticos:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}}$$

y asumiendo que el campo de desplazamiento virtual es una variación del campo de desplazamiento equilibrado $\bar{u} = \delta u,\ \bar{\epsilon}_{ij} = \delta\epsilon_{ij}$.

$$\int_V \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}}\delta\epsilon_{ij}}\, dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV$$

La expresión encima de la llave es la variación de la densidad de energía de deformación δU_0:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}}\delta\epsilon_{ij}$$

Aplicando las propiedades del cálculo de variaciones $\delta\int () = \int \delta()$:

$$\int \delta U_0 dV = \delta \int U_0 dV = \delta U = \delta\Big(\int_S t_i u_i dS + \int_V f_i u_i dV\Big) = \delta(-V)$$

donde *V* es el potencial de las cargas externas. Por lo tanto:

$$\boxed{\delta\Pi = \delta(U + V) = 0}$$

lo que se conoce como el *Principio de energía potencial mínima* (PMPE). De hecho, esta expresión sólo dice que II es estacionario con respecto a variaciones en el campo de desplazamiento cuando el cuerpo está en equilibrio.

Podemos probar que es ciertamente un minimum en el caso de un material elástico lineal: $U_0 = \frac{1}{2}C_{ijkl\varepsilon kl}$. Queremos demostrar:

$$\Pi(v) \geq \Pi(u), \ \forall v$$
$$\Pi(v) = \Pi(u) \Leftrightarrow v = u$$

Considere $\bar{u} = u + \delta u$:

$$\begin{aligned}\Pi(u + \delta u) = &\int_V \Big[\frac{1}{2}C_{ijkl}(\epsilon_{ij} + \delta\epsilon_{ij})(\epsilon_{kl} + \delta\epsilon_{kl})\Big] dV \\ &- \int_S t_i(u_i + \delta u_i)dS - \int_V t_i(u_i + \delta u_i)dV \\ =&\Pi(u) + \cancel{2}\int_V \frac{1}{\cancel{2}}C_{ijkl}\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{kl}dV + \int_V \frac{1}{2}C_{ijkl}\delta\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{kl}dV \\ &- \int_S t_i\delta u_i dS - \int_V f_i\delta u_i dV\end{aligned}$$

El segundo, el cuarto y el quinto término desaparecen tras invocar el PVD y nos quedamos con:

$$\Pi(u + \delta u) = \Pi(u) + \int_V \frac{1}{2}C_{ijkl}\delta\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{kl}dV$$

La integral es siempre ≥ 0, ya que C_{ijkl} es positivo. Por lo tanto:

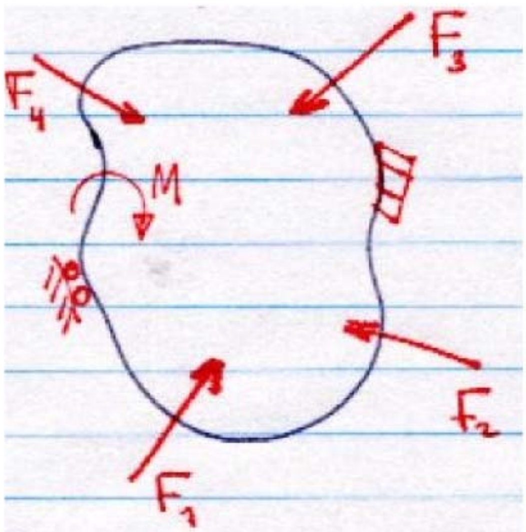
$$\Pi(u + \delta u) = \Pi(u) + a,\ a \geq 0,\ a = 0\ \Leftrightarrow \delta u = 0$$

y

$$\Pi(v) \geq \Pi(u),\ \forall v$$
$$\Pi(v) = \Pi(u) \Leftrightarrow v = u$$

como se buscaba

Primer teorema de Castigliano



Dado un cuerpo en equilibrio bajo la acción de N fuerzas concentradas F_I. La energía potencial de las fuerzas externas viene dada por:

$$V = -\sum_{I=1}^{N} F_I u_I$$

donde los u_I son los valores del campo de desplazamiento en el punto de aplicación de las fuerzas F_I. Imagine que de algún modo podemos expresar la energía de deformación en función de la u_I, esto es:

$$U = U(u_1, u_2, \ldots, u_N) = U(u_I)$$

Entonces:

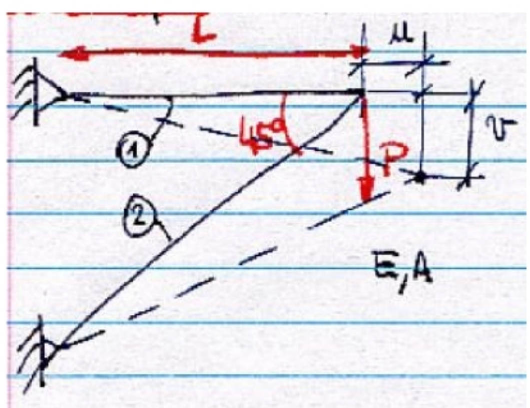
$$\Pi = \Pi(u_I) = U(u_I) + V = U(u_I) - \sum_{I=1}^{N} F_I u_I$$

Invocando el PMPE:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = 0 &= \frac{\partial U}{\partial u_I}\delta u_I - \sum_{I=1}^{N} F_I \underbrace{\frac{\partial u_I}{\partial u_J}}\delta u_J \\
&= \frac{\partial U}{\partial u_I}\delta u_I - \sum_{I=1}^{N} F_I \delta_{IJ}\delta u_J \\
&= \frac{\partial U}{\partial u_I}\delta u_I - \sum_{I=1}^{N} F_I \delta u_I \\
&= \Big(\frac{\partial U}{\partial u_I} - F_I\Big)\delta u_I \\
\forall\ \delta u_I \ &\Leftrightarrow \boxed{F_I = \frac{\partial U}{\partial u_I}}
\end{aligned}$$

Teorema: *si la energía de deformación se puede expresar en términos de N desplazamientos correspondientes a N fuerzas aplicadas, la primera derivada de la energía de deformación con respecto al desplazamiento u_I es la fuerza aplicada.*

Ejemplo:



$$\epsilon_I = \sqrt{\frac{(L+u)^2+v^2}{L^2}} - 1 \sim \frac{u}{L}$$
$$\epsilon_I I = \sqrt{\frac{(L+u)^2+(L-v)^2}{2L^2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\frac{u-v}{L}$$

$$U = \frac{1}{2}\Big\{AEL\Big(\frac{u}{L}\Big)^2 + AE\sqrt{2}L\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{u-v}{L}\Big)\Big]^2\Big\}$$

Observe que hemos escrito $U = U\,(u, v)$. Según el teorema:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial u}$$
$$F = \frac{\partial U}{\partial v}$$

Véase la solución en el archivo adjunto de mathematica