16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003
Unidad 4 – Principios de termodinámica

Primera ley de termodinámica

$$\boxed{\frac{d}{dt}(K+U) = P + H} \tag{1}$$

donde:

- K: energía cinética
- U : energía interna
- P : poder de las fuerzas externas
- H: intercambio de calor por unidad de tiempo

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV = \frac{1}{2}\int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} dV \tag{2}$$

$$U = \int_V \rho \widehat{U} dV,\ \widehat{U}: \quad \text{densidad de energía interna} \tag{3}$$

$$P = \int_V \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS \tag{4}$$

En componentes:

$$P = \int_V f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_S t_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dS \tag{5}$$

Reemplazando $t_i = n_j \sigma ji$ en esta expresión:

$$P = \int_V f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_S n_j \sigma ji \frac{\partial u_i}{\partial t} dS \tag{6}$$

Utilizando el teorema de Gauss:

$$
\begin{aligned}
P &= \int_V f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sigma_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big) dV \\
&= \int_V \Big[\underbrace{\Big(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i\Big)}_{\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\ \text{(why?)}} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sigma_{ji}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\Big] dV \\
&= \int_V \Big(\rho\underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2} + \underbrace{\sigma_{ji}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\sigma_{ji}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_{ji}}\Big) dV
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Notación:

Derivadas temporales:

$$\boxed{\frac{\partial(\ \ )}{\partial t} = (\dot{\ \ })}$$

Ejemplos:

- $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \dot{u}_i,\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$
- $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \ddot{u}_i$
- $\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = \dot{\epsilon}_{ij}$

Derivadas espaciales:

$$\boxed{\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_i} = (\ \ )_{,i}}$$

Ejemplos:

- $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \sigma_{ji,j}$

Con esta notación, el poder de las fuerzas externas se puede volver a expresar como:

$$P = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t}dV}_{\text{K}} + \underbrace{\int_V \sigma_{ji}\dot{\epsilon}_{ji}dV}_{\text{poder de deformación}} \tag{8}$$

donde el "*p*dV " dentro de la primera integral estaba incluido dentro de la derivada temporal ya que es una constante debido a la conservación de la masa. Concluimos que parte del poder de las fuerzas externas se dirige a cambiar la energía cinética del material y el resto a deformar el material. Esto último se denomina *poder de deformación* y representa el ritmo al que trabajan las tensiones en el material en deformación.

Reemplazando en la primera ley, ecuación (1):

$$\frac{d}{dt}(K+U) = \frac{d}{dt}(K) + \int_V \sigma_{ji}\dot{\epsilon}_{ji}dV + H \tag{9}$$

Tras cancelar la energía cinética de ambos lados, la primera ley expresa el hecho de que la energía interna de un material en deformación se puede cambiar bien calentando o bien deformando el material:

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\widehat{U}dV = \int_V \sigma_{ji}\dot{\epsilon}_{ji}dV + H} \tag{10}$$

En el caso isotérmico (H = 0):

$$\int_V \left(\rho\frac{\partial\widehat{U}}{\partial t} - \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\right)dV = 0 \tag{11}$$

o, en forma local:

$$\rho\frac{\partial\widehat{U}}{\partial t} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \tag{12}$$

En elasticidad ideal, presumimos que todo el trabajo de deformación se convierte en energía interna, esto es, la densidad de energía interna es *una función estado* de la deformación:

$$\widehat{U} = \widehat{U}(\epsilon_{ij}) \tag{13}$$

Entonces:

$$\frac{\partial\widehat{U}}{\partial t} = \frac{\partial\widehat{U}}{\partial\epsilon_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij} \tag{14}$$

Reemplace en la primera ley, ecuación (12):

$$\rho\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\epsilon_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \;\Rightarrow \tag{15}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}} \tag{16}$$

esto es, los esfuerzos derivados de una potencial.